

Билет №1

1. Уравнение Шредингера, его свойства. Вероятностная интерпретация волновой функции.
2. Фотопроводимость полупроводников. Процессы генерации и рекомбинации носителей заряда.
3. Фотон с энергией  $E_1$  рассеялся на свободном электроном под углом  $\theta$ . Считая, что электрон до соударения покоился, найдите энергию  $E_2$  рассеянного фотона.

Билет №2

1. Стационарные состояния, их временная зависимость. Уравнение Шредингера для стационарных состояний.
2. Принцип работы лазера. Особенности лазерного излучения. Основные типы лазеров, их применение.
3. Рассчитайте активность одного грамма  ${}^{226}_{88}\text{Ra}$ , если период полураспада этого изотопа  $T_{\frac{1}{2}} = 1620$  лет.

Билет №3

1. Спонтанное и индуцированное вынужденное излучение. Коэффициенты “А” и “В” Эйнштейна.
2. Движение микрочастицы в области одномерного потенциального порога. Случай “высокого” и “низкого” порога.
3. Во сколько раз изменится при повышении температуры от  $T_1 = 300$  К до  $T_2 = 320$  К электропроводность  $\sigma$  собственного полупроводника, ширина запрещенной зоны которого равна  $\Delta E = 0,330$  эВ.

Билет №4

1. Прохождение частицы через потенциальный барьер. Туннельный эффект. Сканирующий туннельный микроскоп.
2. Радиоактивность. Закон радиоактивного распада. Виды радиоактивных излучений.
3. Кинетическая энергия  $E_k$  электрона в атоме водорода составляет величину порядка 10 эВ. Используя соотношение неопределенностей оцените минимальные линейные размеры атома.

Билет №5

1. Гипотеза де Бройля. Корпускулярно-волновой дуализм материи. Опыты по дифракции микрочастиц.
2. Эмиссия электронов из металла. Эффект Шоттки. Холодная (автоэлектронная) эмиссия.
3. В некоторый момент времени частица находится в состоянии, описываемом волновой функцией, координатная часть которой имеет вид  $\psi(x) = A \cdot \exp\left(-\frac{x^2}{a^2} + ikx\right)$ , где  $A$  и  $a$  – некоторые постоянные, а  $k$  – заданный параметр, имеющий размерность обратной длины.

Билет №6

1. Волновая функция, ее вероятностный смысл и условия, которым она должна удовлетворять. Принцип суперпозиции в квантовой механике.
2. Эффект Комптона. Дуализм волновых и корпускулярных свойств излучения.
3. При очень низких температурах красная граница фотопроводимости чистого беспримесного германия  $\lambda_{кр} = 1,7$  мкм. Найдите температурный коэффициент сопротивления  $\alpha = \frac{1}{\rho} \cdot \frac{d\rho}{dT}$  данного германия при комнатной температуре.

Билет №7

1. Принцип работы лазера. Особенности лазерного излучения. Основные типы лазеров, их применение.
2. Деление тяжелых ядер, цепные реакции. Термоядерный синтез.
3. Узкий пучок моноэнергетических нерелятивистских электронов нормально падает на поверхность монокристалла в направлении, составляющим угол  $\alpha = 60^\circ$  с нормалью к поверхности, наблюдается максимум отражения электронов третьего порядка. Определите ускоряющую разность потенциалов, которую прошли электроны, если расстояние между отражающими атомными плоскостями кристалла  $d = 0,2$  нм.

Билет №8

1. Работа выхода электрона из металла. Термоэлектронная эмиссия. Формула Ричардсона-Дэнимана.
2. Структура атомного ядра. Характеристики ядер: заряд, размеры, масса, энергия связи. Свойства и обменный характер ядерных сил.
3. Используя соотношение неопределенностей энергии и времени, определите естественную ширину  $\Delta\lambda$  спектральной линии излучения атома при переходе его из возбужденного состояния в основное. Среднее время жизни атома в возбужденном состоянии  $\tau = 10^{-8}$  с, а длина волны излучения  $\lambda = 600$  нм.

Билет №9

1. Прохождение частицы через потенциальный барьер. Туннельный эффект. Сканирующий туннельный микроскоп.
2. Атом во внешнем магнитном поле. Эффект Зеемана.
3. При увеличении термодинамической температуры  $T$  абсолютно черного тела в  $\eta = 2$  раза длина волны  $\lambda_m$ , на которую приходится максимум спектральной плотности энергетической светимости, уменьшилась на  $\Delta\lambda = 400$  нм. Определите начальную и конечную температуры тела  $T_1$  и  $T_2$ .

Билет №10

1. Ядерная модель атома Резерфорда-Бора. Постулаты Бора.
2. Примесная проводимость полупроводников. Концентрация основных и неосновных носителей в полупроводнике  $p$ -типа. Уровень Ферми примесного полупроводника  $p$ -типа. Температурная зависимость проводимости примесного полупроводника  $p$ -типа.
3. В кровь человека ввели небольшое количество раствора, содержащего  $^{24}\text{Na}$  с активностью  $A = 2,0 \cdot 10^{-3}$  Бк. Активность  $1 \text{ см}^3$  через  $t = 5,0$  ч оказалась  $A' = 0,267$  Бк/см<sup>3</sup>. Период полураспада данного изотопа  $T_{\frac{1}{2}} = 15$  ч. Найдите объем крови человека.

Билет №11

1. Тепловое излучение. Интегральные и спектральные характеристики излучения. Закон Кирхгофа. Закон Стефана-Больцмана. Закон смещения Вина.
2. Принцип неразличимости тождественных частиц в квантовой механике. Симметричные и антисимметричные состояния тождественных микрочастиц. Фермионы и бозоны. Принцип Паули.
3. Масс-спектрометрический анализ образцов лунной породы показал, что отношение количества атомов  $Ar$  и  $^{40}K$  в ней равно  $\eta = 10,3$ . Считая, что аргон целиком образовался из калия в результате радиоактивного распада, определите возраст лунной породы. Период полураспада  $^{40}K$  составляет  $T_{\frac{1}{2}} = 1,25 \cdot 10^3$  лет.

#### Билет №12

1. Фотоэффект, его законы. Уравнение Эйнштейна для фотоэффекта. Фотоны. Дуализм волновых и корпускулярных свойств излучения.
2. Квантовые распределения Ферми-Дирака и Бозе-Эйнштейна. Их предельный переход в классическое распределение Максвелла-Больцмана.
3. Частица массой  $m$  находится в одномерной прямоугольной потенциальной яме шириной  $a$  с бесконечно высокими стенками в основном состоянии. Найдите среднее значение квадрата импульса  $\langle p^2 \rangle$  в этом состоянии.

#### Билет №13

1. Частица в трехмерном потенциальном ящике. Энергетический спектр частицы. Понятие о вырождении энергетических уровней.
2. Элементарные частицы, их основные характеристики. Симметрия и законы сохранения в мире элементарных частиц.
3. До какой температуры нужно нагреть классический электронный газ, чтобы средняя энергия его электронов была равна средней энергии свободных электронов в серебре при  $T = 0$  К? Энергия Ферми серебра  $E_f = 5,51$  эВ.

#### Билет №14

1. Частица в одномерной потенциальной яме с бесконечно высокими стенками. Квантование энергии. Плотность вероятности нахождения частицы для различных состояний.
2. Радиоактивность. Виды радиоактивных излучений. Эффект Мессбауэра.
3. Температурный коэффициент сопротивления  $\alpha = \frac{1}{\rho} \frac{d\rho}{dT}$  чистого беспримесного германия при комнатной температуре равен  $\alpha = -0,05$  К<sup>-1</sup>. Найдите ширину запрещенной зоны данного полупроводника.

#### Билет №15

1. Уравнение Шредингера для гармонического осциллятора, анализ его решений.
2. Основные постулаты квантовой механики. Представление физических величин операторами. Собственные функции и собственные значения операторов, их связь с результатами измерений.
3. Воспользовавшись распределением свободных электронов в металле по энергиям, найдите при  $T = 0$  отношение средней скорости свободных электронов к их максимальной скорости.

#### Билет №16

1. Корпускулярно-волновой дуализм материи. Гипотеза де Бройля. Опыты по дифракции микрочастиц.
2. Собственная проводимость полупроводников. Концентрация электронов и дырок в чистых полупроводниках. Температурная зависимость собственной проводимости полупроводников. Уровень Ферми в чистых полупроводниках.
3. Волновая функция основного состояния электрона в атоме водорода имеет вид  $\psi(r) = A \cdot \exp\left(-\frac{r}{a}\right)$ , где  $r$  – расстояние от электрона до ядра,  $a$  – радиус первой боровской орбиты. Определите наиболее вероятное расстояние  $r_{вер}$  электрона от ядра.

#### Билет №17

1. Уравнение Шредингера для атома водорода. Квантовые числа, их физический смысл.
2. Эффект Холла в полупроводниках, его практическое применение.
3. Оцените с помощью соотношения неопределенностей минимальную кинетическую энергию электрона, движущегося в области, размер которой  $L = 10^{-8}$  м соответствует характерному размеру атомов.

#### Билет №18

1. Основные постулаты квантовой механики. Представление физических величин операторами. Вычисление средних значений физических величин.
2. Электроны в периодическом поле кристалла. Образование энергетических зон. Энергетический спектр электронов в модели Кронига-Пенни.
3. Воспользовавшись распределением свободных электронов в металле по энергиям, найдите отношение средней кинетической энергии свободных электронов в металле при  $T = 0$  к их максимальной энергии.

#### Билет №19

1. Орбитальный, спиновой и полный механический и магнитный моменты электрона.
2. Стационарные состояния. Волновая функция частицы в стационарном состоянии. Уравнение Шредингера для стационарных состояний.
3. На какую кинетическую энергию должен быть рассчитан ускоритель заряженных частиц с массой покоя  $m_0$ , чтобы с их помощью можно было исследовать структуры с линейными размерами  $l$ ? Решите задачу для электронов в случае  $l = 10^{-15}$  м, что соответствует характерному размеру атомных ядер.

#### Билет №20

1. Собственные механический и магнитный моменты электрона. Опыт Штерна и Герлаха.
2. Контактные явления в полупроводниках.  $p-n$  переход, его вольт-амперная характеристика.
3. Частица находится в одномерной потенциальной яме шириной  $a$  с бесконечно высокими стенками во втором возбужденном состоянии. Определите вероятность обнаружения частицы в интервале  $\frac{1}{3}a$ , равноудаленном от стенок ямы.

#### Билет №21

1. Статистика Бозе-Эйнштейна. Функция распределения Бозе-Эйнштейна. Свойства идеального газа бозе-частиц.

2. Условия возможности одновременного измерения разных физических величин в квантовой механике. Соотношение неопределенностей Гейзенберга.
3. Определите красную границу  $\lambda_{кр}$  фотоэффекта для цезия, если при облучении его поверхности фиолетовым светом с длиной волны  $\lambda = 400$  нм максимальная скорость фотоэлектронов равна  $V_{max} = 6,5 \cdot 10^5$  м/с.

Билет №22

1. Статистика Ферми-Дирака. Функция распределения Ферми-Дирака. Вырожденный электронный газ. Энергия Ферми.
2. Контактные явления в полупроводниках.  $p$ - $n$  переход, его вольт-амперная характеристика.
3. Частица массой  $m_0$  находится в одномерной потенциальной яме с непроницаемыми стенками в первом возбужденном состоянии. Найдите среднее значение кинетической энергии частицы  $\langle E_k \rangle$ , если ширина ямы равна  $a$ .

Билет №23

1. Дискретный характер испускания и поглощения излучения веществом. Формула Планка для равновесного теплового излучения.
2. Примесная проводимость полупроводников. Концентрация основных и неосновных носителей в полупроводниках  $n$ -типа. Уровень Ферми примесного полупроводника  $n$ -типа. Температурная зависимость проводимости примесного полупроводника  $n$ -типа.
3. Частица находится в одномерной прямоугольной потенциальной яме с бесконечно высокими стенками. Найдите отношение вероятностей нахождения частицы в средней трети ямы для основного и первого возбужденного состояний.

Билет №24

1. Зонная теория твердых тел. Структура зон в металлах, полупроводниках и диэлектриках.
2. Ядерная модель атома Резерфорда-Бора. Постулаты Бора.
3. Найдите с какой скоростью движется электрон, если длина волны де Бройля электрона  $\lambda_B$  равна его комптоновской длине волны  $\lambda_k$ .

Билет №25

1. Частица в одномерной потенциальной яме с бесконечно высокими стенками. Квантование энергии. Плотность вероятности нахождения частиц для различных состояний.
2. Атом во внешнем магнитном поле. Эффект Зеемана.
3. Считая, что кинетическая энергия  $E$  нуклона (протона или нейтрона) в ядре равна 10 МэВ, оцените, исходя из соотношения неопределенностей, линейные размеры ядра.

Билет №26

1. Уравнение Шредингера, его свойства. Вероятностная интерпретация волновой функции.
2. Зонная теория твердых тел. Структура зон в металлах, полупроводниках и диэлектриках.
3. Частица массой  $m_0$  движется в одномерной прямоугольной потенциальной яме с бесконечно высокими стенками. Ширина ямы  $a$ . Найдите значения энергии частицы,

имея в виду, что возможны лишь такие состояния, для которых в яме укладывается целое число дебройлевских полуолн.

#### Билет №27

1. Элементарные частицы. Виды взаимодействий элементарных частиц. Классификация частиц. Лептоны и адроны. Кварковая структура адронов.
2. Эмиссия электронов из металла. Эффект Шоттки. Холодная (автоэлектронная) эмиссия.
3. Электрон находится в одномерной прямоугольной потенциальной яме с непроницаемыми стенками. Определите, при какой ширине ямы  $a$  дискретность энергии электрона становится сравнимой с энергией теплового движения при температуре  $T$ .

#### Билет №28

1. Взаимодействие ядерных излучений с веществом. Детектирование различных излучений. Дозиметрия и защита.
2. Работа выхода электрона из металла. Термоэлектронная эмиссия. Формула Ричардсона-Дэнемена.
3. Волновая функция основного состояния электрона в атоме водорода имеет вид 
$$\psi(r) = \frac{1}{\sqrt{\pi a^3}} \cdot \exp\left(-\frac{r}{a}\right)$$
, где  $r$  – расстояние от электрона до ядра,  $a$  – радиус первой боровской орбиты. Найдите вероятность того, что электрон находится в области  $r \leq a$ .

#### Билет №29

1. Тепловое излучение. Интегральные и спектральные характеристики излучения. Закон Кирхгофа. Закон Стефана-Больцмана. Закон смещения Вина.
2. Собственная проводимость полупроводников. Концентрация электронов и дырок в чистых полупроводниках. Температурная зависимость проводимости беспримесных полупроводников. Уровень Ферми в чистых полупроводниках.
3. Частица массой  $m_0$  падает на прямоугольный потенциальный порог высоты  $U_0$ . Энергия частицы равна  $E$ , причем  $E < U_0$ . Найдите эффективную глубину проникновения частицы в область порога, т.е. на расстояние от границы порога до точки, в которой плотность вероятности нахождения частицы уменьшится в  $e$  раз.

#### Билет №30

1. Частица в трехмерном потенциальном ящике. Энергетический спектр частицы. Понятие о вырождении энергетических уровней.
2. Принцип неразличимости тождественных частиц в квантовой механике. Симметричные и антисимметричные состояния тождественных микрочастиц. Фермионы и бозоны. Принцип Паули.
3. Покажите, что в атоме водорода на круговой стационарной боровской орбите укладывается целое число длин волн де Бройля электрона. Определите длину волны де Бройля электрона на круговой орбите с главным квантовым числом  $n$ .

1. Уравнение Шредингера, его свойства. Вероятностная интерпретация волновой функции.

Уравнения  $i\hbar \frac{\partial \Psi}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m} \Delta \Psi + U(x, y, z) \Psi$  и  $\frac{\hbar^2}{2m} \Delta \psi + [E - U(x, y, z)] \psi = 0$  называются уравнениями Шредингера соответственно со временем и без времени. Для свободной частицы уравнение Шредингера имеет вид:  $\frac{\hbar^2}{2m} \Delta \psi + E \psi = 0$ . Это уравнение имеет конечные во всем пространстве решения при любых положительных значениях энергии  $E$  (включая ноль). В качестве решений можно взять функции вида:  $\psi = C e^{\frac{i}{\hbar} \vec{p} \vec{r}}$ .

Подставляя в уравнение Шредингера  $\Psi = a e^{\frac{iS}{\hbar}}$  после преобразований получим:  $\frac{\partial a^2}{\partial t} + \text{div} \left( a^2 \frac{\nabla S}{m} \right) = 0$ . Это уравнение имеет наглядный физический смысл.  $a^2$  есть плотность вероятности нахождения частицы в том или ином месте пространства ( $a^2 = |\Psi|^2$ ),  $\frac{\nabla S}{m} = \frac{\vec{p}}{m}$  – скорость частицы.

Если силовое поле стационарно, то функция  $U$  не зависит явно от времени и имеет смысл потенциальной энергии, тогда  $\psi(\vec{r}, t) = \psi(\vec{r}) e^{-i\omega t}$ . Подставляя это соотношение в уравнение Шредингера и сокращая на  $e^{-i\omega t}$ , получаем уравнение для стационарных состояний

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \Delta \psi(\vec{r}) + U \psi(\vec{r}) = E \psi(\vec{r})$$

Статистический смысл пси функции:  $dP = |\psi|^2 dV$ , квадрат модуля пси-функции определяет вероятность  $dP$  того, что частица будет обнаружена в пределах объема  $dV$ , условия ктр. должна удовлетворять пси-ф-я: непрерывная, конечная, однозначная, производные непрерывны. Вычтем из уравнения Шредингера.

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2 \psi(x, t)}{\partial x^2} + U(x, t) \psi(x, t) = i\hbar \frac{\partial \psi(x, t)}{\partial t}$$

комплексно сопряженное ему ур-е

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2 \bar{\psi}}{\partial x^2} + U \bar{\psi} = -i\hbar \frac{\partial \bar{\psi}}{\partial t}$$

получим  $-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial}{\partial x} \left( \bar{\psi} \frac{\partial \psi}{\partial x} - \psi \frac{\partial \bar{\psi}}{\partial x} \right) = i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \left( \bar{\psi} \frac{\partial \psi}{\partial t} + \psi \frac{\partial \bar{\psi}}{\partial t} \right)$  или

$$\frac{\partial}{\partial t} |\psi|^2 + \frac{\partial}{\partial x} \left( -\frac{i\hbar}{2m} \left( \bar{\psi} \frac{\partial \psi}{\partial x} - \psi \frac{\partial \bar{\psi}}{\partial x} \right) \right) = 0$$

откуда  $\frac{\partial}{\partial t} |\psi|^2 + \text{div} \left( -\frac{i\hbar}{2m} (\bar{\psi} \cdot \nabla \psi - \psi \cdot \nabla \bar{\psi}) \right) = 0$  где выражение в скобках и есть вектор

плотности потока вероятности, по аналогии с уравнением непрерывности  $\frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div} \vec{j} = 0$ .

Принцип суперпозиции. Пусть в состоянии с волновой функцией  $\psi_1(\vec{r})$  некоторое измерение приводит с достоверностью к определенному результату 1, а в состоянии с волновой функцией  $\psi_2(\vec{r})$  - к результату 2. Тогда всякая линейная комбинация  $\psi_1$  и  $\psi_2$ , т.е. всякая волновая функция вида  $c_1 \psi_1 + c_2 \psi_2$ , где  $c_1$  и  $c_2$  - постоянные, дает состояние, в котором то же измерение дает либо результат 1, либо результат 2. Вероятности проявления этих результатов равны  $c_1^2$  и  $c_2^2$  соответственно. Если  $\psi_1(\vec{r}, t)$  и  $\psi_2(\vec{r}, t)$

являются решениями уравнения Шредингера, то и любая их линейная комбинация

$$\psi = \sum_n c_n \psi_n$$

также является решением уравнения Шредингера.

2. Фотопроводимость полупроводников. Процессы генерации и рекомбинации носителей заряда.

Фотопроводимость полупроводников возникает благодаря явлению внутреннего фотоэффекта. Внутренний фотоэффект заключается в обусловленном действием света перераспределении электронов по энергетическим уровням. Если энергия кванта  $\hbar\omega$  превышает ширину запрещенной зоны, поглотивший квант электрон переходит из валентной зоны в зону проводимости – появляется дополнительная пара носителей тока – электрон и дырка, что проявляется в увеличении электропроводности вещества. Если в веществе имеются примеси, под действием света электроны могут переходить из валентной зоны на уровни примеси или с примесных зон в зону проводимости. В первом случае возникает *дырочная*, во втором – *электронная* проводимость. На внутреннем фотоэффекте основано действие фотосопротивлений. Количество образующихся носителей тока пропорционально падающему световому потоку. Фотосопротивления из полупроводников PbS, PbSe, PbTe, InSb используются в качестве детекторов инфракрасного излучения.

### Билет №2

1. Стационарные состояния, их временная зависимость. Уравнение Шредингера для стационарных состояний.

Уравнение Шредингера.  $\psi = c \cdot e^{i(\vec{k}\cdot\vec{r}-\omega t)}$

1. Уравнение должно быть линейным и однородным, чтобы выполнялся принцип дифракции и интерференции. 2) Чтобы выполнялся принцип суперпозиции, уравнение должно содержать мировые константы. 3) Должно решаться для любых квантово-мех. задач.

$$\frac{\partial \psi}{\partial x} = ik_x \psi, \quad \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} = -k_x^2 \psi, \quad \Delta \psi = \nabla^2 \psi = -k^2 \psi = -(p/\hbar)^2 \psi, \quad \frac{\partial \psi}{\partial t} = -i\omega \psi = -i \frac{\varepsilon}{\hbar} \psi,$$

$$\varepsilon = p^2 / 2m,$$

$$i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} = \varepsilon \psi = \frac{p^2}{2m} \psi = -\frac{\hbar^2}{2m} \Delta \psi, \quad -\frac{\hbar^2}{2m} \Delta \psi = i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t}$$

- для свободной микрочастицы, Мы будем рассм. потенциальные поля, энергия в ктр. хар-ся  $\frac{p^2}{2m} = E - U$ , тогда

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \Delta \psi + U \psi = i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} \quad \text{- Ур-е ШРЕДИНГЕРА.}$$

Если силовое поле стационарно, то ф-я  $U$  не зависит явно от времени и имеет смысл потенц. энергии, тогда  $\psi(\vec{r}, t) = \psi(\vec{r}) e^{-i\omega t}$ , подставляя в Ур-е Шредингера и сокращая на  $e^{-i\omega t}$ , получаем Ур-е для стационарных

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \Delta \psi(\vec{r}) + U \psi(\vec{r}) = E \psi(\vec{r})$$

Статистич. смысл пси-ф-ции.  $dP = |\psi|^2 dV$ , квадрат модуля пси-ф-ии определяет вероятность  $dP$  того, что частица будет обнаружена в пределах объема  $dV$ , условия ктр. должны удовлетворять пси-ф-я: непрерывная, конечная, однозначная, производные



непрерывны. Вычтем из ур-я Ш. 
$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2 \psi(x,t)}{\partial x^2} + U(x,t)\psi(x,t) = i\hbar \frac{\partial \psi(x,t)}{\partial t}$$
 комплексно

сопряженное ему ур-е 
$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2 \bar{\psi}}{\partial x^2} + U\bar{\psi} = -i\hbar \frac{\partial \bar{\psi}}{\partial t}$$

получим 
$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial}{\partial x} \left( \bar{\psi} \frac{\partial \psi}{\partial x} - \psi \frac{\partial \bar{\psi}}{\partial x} \right) = i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \left( \bar{\psi} \frac{\partial \psi}{\partial t} + \psi \frac{\partial \bar{\psi}}{\partial t} \right)$$
 или

$$\frac{\partial}{\partial t} |\psi|^2 + \frac{\partial}{\partial x} \left( -\frac{i\hbar}{2m} \left( \bar{\psi} \frac{\partial \psi}{\partial x} - \psi \frac{\partial \bar{\psi}}{\partial x} \right) \right) = 0$$

откуда 
$$\frac{\partial}{\partial t} |\psi|^2 + \text{div} \left( -\frac{i\hbar}{2m} (\bar{\psi} \cdot \nabla \psi - \psi \cdot \nabla \bar{\psi}) \right) = 0$$
 где выражение в скобках и есть вектор

плотности потока вероятности, по аналогии с уравнением непрерывности 
$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div} \vec{j} = 0$$

**Принцип суперпозиции.** Пусть в состоянии с волновой функцией  $\psi_1(\vec{r})$  некоторое измерение приводит с достоверностью к определенному результату 1, а в состоянии с волновой функцией  $\psi_2(\vec{r})$  - к результату 2. Тогда всякая линейная комбинация  $\psi_1$  и  $\psi_2$ , т.е. всякая волновая функция вида  $c_1\psi_1 + c_2\psi_2$ , где  $c_1$  и  $c_2$  - постоянные, дает состояние, в котором то же измерение дает либо результат 1, либо результат 2. Вероятности проявления этих результатов равны  $c_1^2$  и  $c_2^2$  соответственно. Если  $\psi_1(\vec{r}, t)$  и  $\psi_2(\vec{r}, t)$

являются решениями уравнения Шредингера, то и любая их лин. комб. 
$$\psi = \sum_n c_n \psi_n$$
 также является решением уравнения Шредингера.

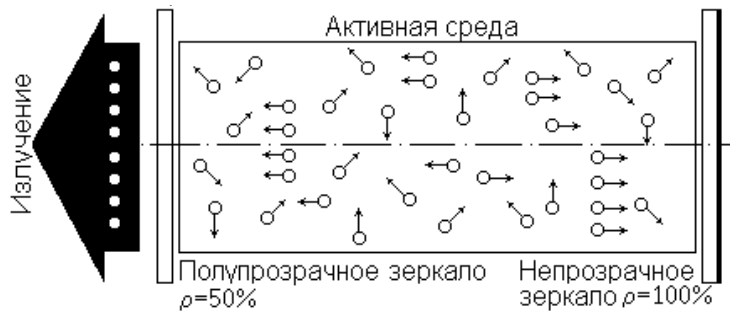
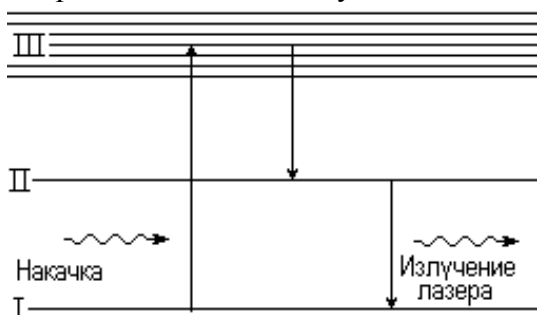
## 2. Принцип работы лазера. Особенности лазерного излучения. Основные типы лазеров, их применение.

Лазеры –устройства, при прохождении через ктр. э/м волны, усиливаются за счет открытого Эйнштейном вынужденного излучения. Принцип работы: Когда среда поглощает энергию (доставленную любым способом, например, фотонами), то ее часть запасается (поглощается) в виде энергии возбужденных атомов или молекул (рис. 1а).

Молекула, атом или ион из возбужденного состояния может перейти на более низкий энергетический уровень (рис. 1б) самопроизвольно (спонтанно) или под действием внешнего электромагнитного излучения (вынужденно) с частотой, равной частоте кванта, испущенного спонтанно (рис. 1в). Эти переходы могут сопровождаться излучением, называемым соответственно спонтанным или вынужденным, причем

частота излучения определяется соотношением: 
$$h\nu = E_j - E_i$$

где  $E_j$  и  $E_i$  — энергетические уровни, между которыми осуществляется переход, сопровождающийся излучением кванта энергии, дополнительного к кванту внешнего



электромагнитного излучения, его вызвавшему.

Если кванты спонтанного излучения испускаются в случайных направлениях, то квант вынужденного излучения испускается в том же направлении, что и квант внешнего электромагнитного поля. Причем частота, фаза и поляризация вынужденного и внешнего

излучений совпадают, то есть оба кванта полностью тождественны (рис. 1в). Под действием электромагнитного излучения могут происходить переходы не только с более высокого энергетического уровня на более низкий, но и в обратном направлении, что соответствует акту поглощения. Для того чтобы преобладали переходы, при которых происходит излучение энергии, необходимо создать инверсную населенность возбужденного уровня  $E_j$ , то есть создать повышенную концентрацию атомов или молекул на этом уровне. Процесс создания инверсной населенности – накачка. Для создания инверсной населенности прим. 3-х уровневая схема: 1) молекулы привнесенной извне энергией переводятся из основного I в возб. III сост. Уровень III – такой, что время жизни молекул очень мало  $10^{-8}$ , если на ур-не II вр. жизни мол-л  $10^{-3}$ , то молекулы спонтанно без излучения переходя с ур-ня III будут накапливаться на ур-не II (метастабильном). Созданная т.о. инверсная населенность обеспечит усл-я для усиления излучения. среда в ктр. создана инверсная населенность – активная. Однако генерация оптич. колебаний может возникнуть только в том случае, если вынужденное излучение, раз возникнет будет вызывать новые акты. Для создания такого пр-са активную среду помещают в оптич. резонатор. Опт. резонатор – сист. из 2 зеркал между ктр. располагается активная среда. Важнейшее св-во зеркал – высокий коэф. отражения. С ур-ня II на I могут происходить и спонтанные и вынужденные переходы. При спонт. переходе одного из атомов испускается фотон, ктр. вызывает вынужденные переходы др. атомов, тоже сопровождающиеся излучением фотонов. Развивается лавинообразный процесс. Оптический резонатор ориентирует направление движ фотонов вдоль оси кристалла. При достижении опр. мощности излучение выходит через зеркало (особенно через полупрозрачное).

Особенности: 1) выс. монохроматичность; 2) малая расходимость пучка; 3) больш. интенсивность; 4) выс. когерентность.

Типы лазеров: 1) твердотельные; 2) полупроводниковые; 3) жидкостные; 4) газовые.

Применение: 1) высокоточная мех. обработка; 2) в медицине (скальпель); 3) оружие.

### Билет №3

1. Спонтанное и индуцированное вынужденное излучение. Коэффициенты “А” и “В” Эйнштейна.

Спонтанный переход – переход атомов с более высоких на более низкие энергетические уровни. Такие переходы приводят к спонтанному испусканию атомами фотонов. Индукцированные переходы – переходы с более низких на более высокие уровни энергии под действием излучения. Для возможности установления равновесия при произвольной интенсивности падающего излучения необходимо существование «испускательных переходов», вероятность ктр. возрастала бы с увеличением интенсивности излучения, т.е. «испуск. переходов», вызываемых излучением. Возникающее при таких переходах излучение назыв. вынужденным или индуцированным.

Вынужденное и вынуждающее излучения являются строго когерентными. Пусть  $P_{nm}$  - вероятность вынужденного перехода атома в ед. времени с энергетического уровня  $E_n$  на уровень  $E_m$ ,  $P_{mn}$  - вер-ть обратного перехода. При одинаковой интенсивности излучения  $P_{nm} = P_{mn}$ .  $P_{nm} = B_{nm}u_\omega$  и  $P_{mn} = B_{mn}u_\omega$  - вероятность вынужденных переходов пропорциональна плотности энергии  $u_\omega$  вынуждающего переход магнитного поля, приходящейся на частоту  $\omega$ , соответствующую данному переходу ( $\omega = (E_n - E_m) / \hbar$ ). Величины  $B_{nm} = B_{mn}$  называют коэф. Эйнштейна. Равновесие между веществом и излучением будет достигнуто при условии, что число атомов  $N_{nm}$ , совершающих в ед. времени переход из состояния  $n$  в сост.  $m$ , будет равно числу атомов  $N_{mn}$ , совершающих переход в обр. направ. Пусть  $E_n > E_m$ , тогда переходы  $m \rightarrow n$  смогут

происх. только под воздействием излучения, переходы  $n \rightarrow m$  будут совершаться как вынужденно, так и спонтан.,  $\Rightarrow N_{mn} = N_{mn}^{вынужд} , N_{nm} = N_{nm}^{вынужд} + N_{nm}^{спонт}$

Усл. равновесия:  $N_{mn}^{вынужд} = N_{nm}^{вынужд} + N_{nm}^{спонт}$  имеем  $N_{mn}^{вынужд} = P_{mn} N_m = B_{mn} u_{\omega} N_m$   
 $N_{nm}^{вынужд} = P_{nm} N_n = B_{nm} u_{\omega} N_n$

( $N_m$  и  $N_n$  - числа атомов в сост. m и n). Вероятность спонтанного перехода атома в ед. времени из сост. n в сост m через  $A_{nm}$ . Тогда число атомов совершающих в ед. вр. спонтанный переход  $n \rightarrow m$ , опр.  $N_{nm}^{спонт} = A_{nm} N_n$  т.е.

$B_{mn} u_{\omega} N_m = B_{nm} u_{\omega} N_n + A_{nm} N_n$ . определяем равновесное

значение  $u(\omega, T) = \frac{A_{nm}}{B_{nm}} \frac{1}{N_m / N_n - 1}$  (1), Согласно 3-ну Больцмана  $\frac{N_n}{N_m} = e^{(E_n - E_m)/kT} = e^{\hbar\omega/kT}$

При малых частотах  $u(\omega, T) = \frac{A_{nm}}{B_{nm}} \frac{kT}{\hbar\omega}$  сравнивая с формулой Рэлея-Джинса

$u(\omega, T) = \frac{\omega^2}{\pi^2 c^3} kT$  находим, что  $\frac{A_{nm}}{B_{nm}} = \frac{\hbar\omega^3}{\pi^2 c^3}$  подставляя в (1) получаем формулу Планка.

## 2. Движение микрочастицы в области одномерного потенциального порога. Случай “высокого” и “низкого” порога.

Одномерный потенциальный порог.  $U(x) = 0 (x < 0)(I)$

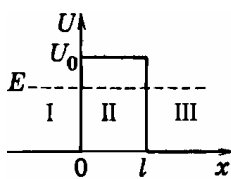
и  $U(x) = U_0 (x > 0)(II)$ ; Решения ур-ий Шредингера для стац. сост. имеет вид

$\psi_1 = \exp(ik_1 x) + \frac{k_1 - k_2}{k_1 + k_2} \exp(-ik_1 x)$  и  $\psi_2 = \frac{2k_1}{k_1 + k_2} \exp(ik_2 x)$  где  $\psi_1(x)$  и  $\psi_2(x)$

волновые ф-ии частицы в обл-тях I и II соотв.  $k_1 = \frac{1}{\hbar} \sqrt{2m_0 E}$  и  $k_2 = \frac{1}{\hbar} \sqrt{2m_0 (E - U_0)}$ ,

Вер-ть того что частица отразится от порога опр-ся коэф. отражения  $R = \left| \frac{k_1 - k_2}{k_1 + k_2} \right|^2$ ,

Вероятность прохождения частицы  $D = 1 - R$



Потенциальный барьер. Пусть ч-ца движущаяся слева направо, встречает на своем пути потенц. барьер высоты  $U_0$ . Рассм. случай

$E < U_0$  тогда  $\frac{d^2\psi}{dx^2} + \frac{2m}{\hbar^2} E\psi = 0$  (1) для обл. I и III

$\frac{d^2\psi}{dx^2} + \frac{2m}{\hbar^2} (E - U_0)\psi = 0$  (2) для обл-ти II причем  $E - U_0 < 0$ . Будем искать реш. ур-я (1) в

виде  $\psi = \exp(\lambda x)$  подставляя получаем  $\lambda^2 + \frac{2m}{\hbar^2} E = 0$  отсюда  $\lambda = \pm i\alpha$ , где  $\alpha = \frac{1}{\hbar} \sqrt{2mE}$ ,

т.о. реш. ур-я (1) имеет вид  $\psi_1 = A_1 \exp(i\alpha x) + B_1 \exp(-i\alpha x)$  для обл-ти I,

$\psi_3 = A_3 \exp(i\alpha x) + B_3 \exp(-i\alpha x)$  для обл-ти III, аналогично для ур-я (2)

$\psi_2 = A_2 \exp(\beta x) + B_2 \exp(-\beta x)$  для обл. II,  $\beta = \frac{1}{\hbar} \sqrt{2m(U_0 - E)}$ . Заметим, что реш. вида

$\exp(i\alpha x)$  соотв. волне распротр. в положит. направлении оси x, а реш. вида  $\exp(-i\alpha x)$  - в противополож.

В обл. III имеется только волна, прошедшая через барьер и распр. слева направо следов.

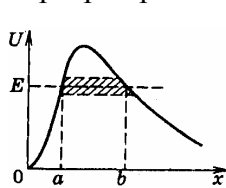
$B_3=0$ . Для того чтобы  $\psi$  была непрерывна должно вып. усл.  $\psi_1(0) = \psi_2(0)$  и  $\psi_2(l) = \psi_3(l)$ . Для того чтобы  $\psi$  не имела изломов необх.:  $\psi'_1(0) = \psi'_2(0)$  и  $\psi'_2(l) = \psi'_3(l)$ ,

причем  $R = |B_1|^2 / |A_1|^2$  - отношение квадратов модулей амплитуд отраженной и падающих волн определяет вер-ть отражения частицы от потенц. барьера - *коэф. отражения*.

$D = |A_3|^2 / |A_1|^2$  - отнош. квадратов модулей амплитуд прошедшей и падающей волн - вер-ть прохождения частицы через барьер - *коэф. прохождения*.

$R + D = 1$ . Из ур-ний получившихся из условий непрерывности и гладкости пси-ф-ии, находим

$D \approx \exp(-2\beta l) = \exp\left(-\frac{2}{\hbar} \sqrt{2m(U_0 - E)l}\right)$ , т.е. вер-ть прохождения частицы через потенц. барьер сильно зависит от ширины барьера  $l$  и от его превышения над  $E$ . В случае барьера произв. формы

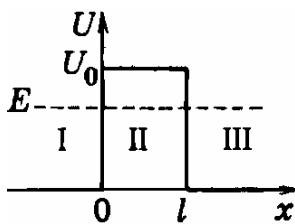


$$D \approx \exp\left(-\frac{2}{\hbar} \int_a^b \sqrt{2m(U(x) - E)} dx\right)$$

При преодолении потенц. барьера ч-ца как бы проходит через туннель в этом барьере - рассм. нами явление - *туннельный эффект*.

#### Билет №4

1. Прохождение частицы через потенциальный барьер. Туннельный эффект. Сканирующий туннельный микроскоп.



Потенциальный барьер. Пусть ч-ца движущаяся слева направо, встречает на своем пути потенц. барьер высоты  $U_0$ . Рассм.

случай  $E < U_0$  тогда  $\frac{d^2\psi}{dx^2} + \frac{2m}{\hbar^2} E\psi = 0$  (1) для обл. I и III

$\frac{d^2\psi}{dx^2} + \frac{2m}{\hbar^2} (E - U_0)\psi = 0$  (2) для обл-ти II причем  $E - U_0 < 0$ .

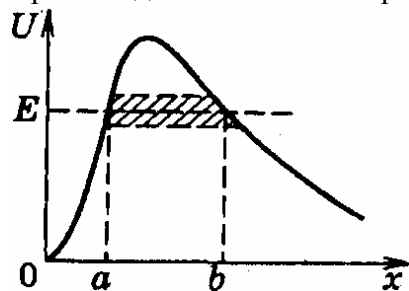
Будем искать реш. ур-я (1) в виде  $\psi = \exp(\lambda x)$  подставляя получаем  $\lambda^2 + \frac{2m}{\hbar^2} E = 0$

отсюда  $\lambda = \pm i\alpha$ , где  $\alpha = \frac{1}{\hbar} \sqrt{2mE}$ , т.о. реш. ур-я (1) имеет вид

$\psi_1 = A_1 \exp(i\alpha x) + B_1 \exp(-i\alpha x)$  для обл-ти I,  $\psi_3 = A_3 \exp(i\alpha x) + B_3 \exp(-i\alpha x)$  для обл-ти III,

аналогично для ур-я (2)  $\psi_2 = A_2 \exp(\beta x) + B_2 \exp(-\beta x)$  для обл. II,  $\beta = \frac{1}{\hbar} \sqrt{2m(U_0 - E)}$ .

Заметим, что реш. вида  $\exp(i\alpha x)$  соотв. волне распротр. в положит. направлении оси  $x$ , а реш. вида  $\exp(-i\alpha x)$  - в противополож. В обл. III имеется только волна, прошедшая



через барьер и распр. слева направо следов.  $B_3=0$ . Для

того чтобы  $\psi$  была непрерывна должно вып. усл.

$\psi_1(0) = \psi_2(0)$  и  $\psi_2(l) = \psi_3(l)$ . Для того чтобы  $\psi$  не

имела изломов необх.:  $\psi'_1(0) = \psi'_2(0)$  и  $\psi'_2(l) = \psi'_3(l)$ ,

причем  $R = |B_1|^2 / |A_1|^2$  - отношение квадратов модулей амплитуд отраженной и падающих волн определяет вер-

ть отражения частицы от потенц. барьера - *коэф. отражения*.  $D = |A_3|^2 / |A_1|^2$  - отнош.

квадратов модулей амплитуд прошедшей и падающей волн – вер-ть прохождения частицы через барьер – *коэф. прохождения*.  $R + D = 1$ . Из ур-ний получившихся из условий непрерывности и гладкости пси-ф-ии, находим

$$D \approx \exp(-2\beta l) = \exp\left(-\frac{2}{\hbar} \sqrt{2m(U_0 - E)l}\right), \text{ т.е. вер-ть прохождения частицы через потенц.}$$

барьер сильно зависит от ширины барьера  $l$  и от его превышения над  $E$ . В случае барьера произв. формы

$$D \approx \exp\left(-\frac{2}{\hbar} \int_a^b \sqrt{2m(U(x) - E)dx}\right). \text{ При преодолении потенц. барьера ч-ца как бы}$$

проходит через туннель в этом барьере – рассм. нами явление – *туннельный эффект*.

## 2. Радиоактивность. Закон радиоактивного распада. Виды радиоактивных излучений.

Радиоактивностью называется самопроизвольное превращение одних атомных ядер (нестабильных) в другие, сопровождаемое испусканием элементарных частиц.

Радиоактивные процессы: 1)  $\alpha$ -распад, 2)  $\beta$ -распад, 3)  $\gamma$ -излучение ядер, 4) спонтанное деление тяжелых ядер, 5) протонная радиоактивность. Радиоактивное ядро – материнское, образующееся при распаде – дочернее. Радиоак-ть подразделяют на естественную и искусственную, принципиальных различий в них нет.

Закон радиоактивного распада. Отдельные радиоактивные ядра распадаются независимо друг от друга. Можно считать, что число ядер  $dN$ , распадающихся за малый промежуток времени  $dt$ , пропорционально как числу имеющихся ядер  $N$ , так и  $dt$ :  $dN = -\lambda N dt$ , где  $\lambda$  – постоянная распада, характерная для каждого рад. препарата (“–“ т.к. убыль числа ядер). Проинтегрируем, получим:  $N = N_0 e^{-\lambda t}$ , где  $N_0$  – количество ядер в начальный момент,  $N$  – количество нераспавшихся ядер в момент времени  $t$ . Это закон рад-ого распада: число нераспавшихся ядер убывает со временем по экспоненте. Активность  $A = |dN/dt| = \lambda N$  – число ядер, распавшихся за ед. времени. [1 Бк (беккерель) = 1 распад/с или 1 Ки(кюри) =  $3,7 \cdot 10^{10}$  Бк]. Удельная активность – активность на ед. массы рад. препарата.

Период полураспада  $T$ : из условия  $N_0/2 = N_0 e^{-\lambda T}$ , откуда  $T = \ln 2 / \lambda = 0,693 / \lambda$ .

Среднее время жизни  $\tau = (1/N_0) \int_0^\infty t dN = (1/N_0) \int_0^\infty t \lambda N dt = (1/N_0) \int_0^\infty t \lambda N_0 e^{-\lambda t} dt = 1/\lambda$ .

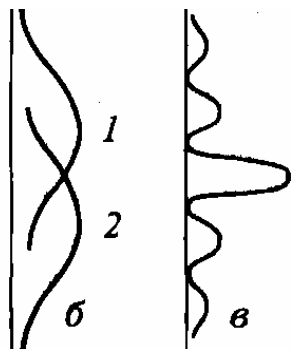
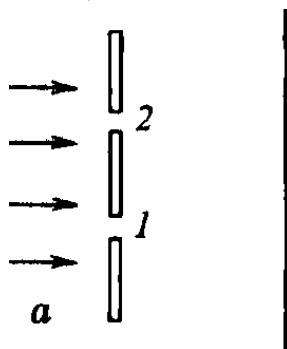
Виды рад. излучений.  $\alpha$ -распад. Самопроизвольное испускание ядром  $\alpha$ -частицы (ядра  ${}^4_2\text{He}$ ):  ${}^A_Z X \rightarrow {}^{A-4}_{Z-2} Y + {}^4_2\text{He}$ . Спектр излучения  $\alpha$ -частицы дискретный (монохромные волны). Масса материнского ядра  $>$  массы дочернего. Энергия  $\alpha$ -частицы: 4-9 эВ.  $\alpha$ -частица, покидая ядро, преодолевает потенциальный барьер, высота которого больше ее энергии. Внутренняя сторона барьера обусловлена ядерными силами, внешняя – кулоновскими. Преодолевает барьер благодаря туннельному эффекту.

$\beta$ -распад. Самопроизвольный процесс, в котором исходное ядро превращается в другое ядро с тем же массовым числом  $A$ , но с  $Z$ , отличающимся от исходного на  $\pm 1$  (испускание  $e^-$  или захват). Виды: 1) электронный  $\beta^-$ -распад (испускается  $e^-$  и  $Z \rightarrow Z+1$ ); 2) позитронный  $\beta^+$ -распад (испускается  $e^+$  и  $Z \rightarrow Z-1$ ); 3) К-захват (ядро захватывает  $e^-$ , находящийся на К-ой оболочке и  $Z \rightarrow Z-1$ , сопровождается рентгеновским излучением)

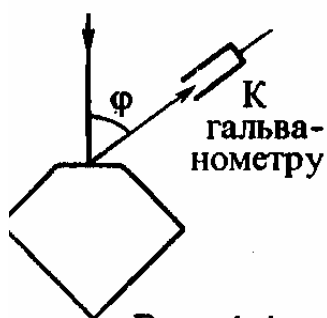
$\gamma$ -излучение. Испускание возбужденным ядром при переходе его в нормальное состояние  $\gamma$ -квантов (их энергия 10кэВ – 5МэВ, спектр дискретный, т.к. дискретны энергетические уровни самих ядер).  $\gamma$ -распад – процесс внутриядерный ( $\beta$ -распад – внутринуклонный). Возбужденные ядра могут переходить в основное состояние, передавая энергию возбуждения внешним  $e^-$  – внутренняя конверсия электронов (эти  $e^-$  моноэнергетичны), явление сопровождается рентгеновским излучением.

1. Гипотеза де Бройля. Корпускулярно-волновой дуализм материи. Опыты по дифракции микрочастиц.

Св-ва микрочастиц. (э-ны, протоны, фотоны, мол-лы, ядра, атомы) Всякий микрообъект – образование особого рода, сочет. св-ва частицы и волны, но не ведущ. себя ни как частица ни как волна. Отличие от волны – она всегда обнаруживается как неделимое целое, отличие от макрочастицы - не обладает одновременно определенными



значениями координаты и импульса, следовательно понятие траектории применительно к микрочастице утрачивает смысл. Своеобразие св-в микрочастиц обнаруживается на след. эксперименте: Направим на преграду с 2 узкими щелями парал. поток моноэнергетич. э-нов. За преградой поставим



фотопластинку. Вначале закроем вторую щель и проведем экспонирование в теч. вр.  $t$ . Почернение на фотопластинке – кривая 1, закрываем первую щель и облучаем в теч. вр  $t$ , получаем кривую 2. Наконец открываем обе щели и подвергнем экспонированию, получим картину в), ктр. отнюдь не эквивалентна наложению двух первых картин. Наличие дифракц. картины свидетельствует о том, что на движ. каждого э-на оказывают влияние оба отверстия. Такой вывод несовместим с понятиями о траекториях.

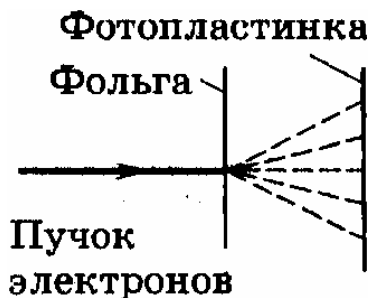
Гипотеза де Бройля. Де Бройль поставил в соотв. движ.

микрочастиц – нектр. волновой пр-сс  $\psi = e^{i(\vec{k}\vec{r}-\omega t)}$ ,  $\psi$  – какая-

то хар-ка волны. Энергия фотона  $E = \hbar\omega$ , импульс  $p = \frac{2\pi\hbar}{\lambda}$ .

По идее де Бройля движ. э-на или какой-либо др. частиц связано с волновым пр-сом, длина волны ктр. равна

$$\lambda = \frac{2\pi\hbar}{p} = \frac{2\pi\hbar}{mv}, \text{ а частота } \omega = \frac{E}{\hbar},$$



Эксп. проверка гипотезы де Бройля: Дэвисон и Джермер (1927) отражение э-нов от монокристалла никеля, в результате образуется дифракционная картина(можно прим. ф-лу Вульфа-Брэггов). Томсон получил дифр. картину при прохождении э-ного пучка через тонкую мет. фольгу и попадающего на фотопластинку.

2. Эмиссия электронов из металла. Эффект Шоттки. Холодная (автоэлектронная) эмиссия.

Наименьшая энергия, которую необходимо сообщить эл-ону для того чтобы удалить его из твердого или жидкого тела в вакуум, называется *работой выхода*. Ее обозначают  $e\phi$ , где  $\phi$  - величина называемая потенциалом выхода. Работа выхода электрона из металла определяется выражением:  $e\phi = E_{p0} - E_F$ . (в предположении что температура металла равна 0 К ( $E_{p0}$  - полная работа выхода)). При других температурах работу выхода также определяют как разность глубины потенциальной ямы и уровня Ферми. Работа выхода сильно зависит от состояния поверхности металла.

При температурах отличных от абсолютного нуля, имеется некоторое кол-во эл-нов энергия которых достаточна для того чтобы преодолеть потенциальный барьер на границе металла. При повышении температуры их кол-во растет. Испускание эл-онов нагретым металлом называется *термоэлектронной эмиссией*. Ее

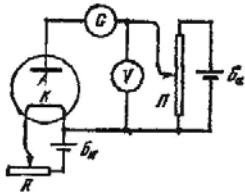


Рис. 61.1.

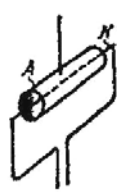


Рис. 61.2.

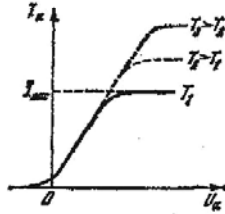


Рис. 61.3.

исследование осуществляется с помощью вакуумного диода, в котором находятся 2 электрода-катод и анод. Катод нагревается током от внешней батареи, а на оба электрода подается напряжение от анодной батареи. При постоянном токе накала катода ВАХ диода имеет вид на рисунке. С ростом  $U_a$  все больше электронов отсасывается электр. полем к аноду и при определенном значении  $U_a$  все вылетевшие из катода эл-оны получают возможность достигнуть

анода. Дальнейший рост  $U_a$  не может увеличить силу анодного тока-ток достигает насыщения. Ток насыщения характеризует эмиссию. Если в единицу времени с единицы поверхности катода вылетает  $N$  эл-онов, то плотность тока насыщения будет равна  $j_{нас} = Ne$ . Изменяя плотность тока насыщения при различной силе тока накала можно найти кол-во эл-онов, вылетающих с единицы поверхности при разных температурах.

$j_{нас} = AT^2 \exp(-e\phi / kT)$  - формула Ричардсона-Дешмана.  $A$  = конст. График этой ф-ции - ветвь параболы в первой плоскости. Формула Ричардсона отличается только наличием  $T^{1.2}$  вместо  $T^2$ .

## Билет №6

1. Волновая функция, ее вероятностный смысл и условия, которым она должна удовлетворять. Принцип суперпозиции в квантовой механике.

Уравнение Шредингера.  $\psi = c \cdot e^{i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)}$  1. Уравнение должно быть линейным и однородным, чтобы выполнялся принцип дифракции и интерф. 2) Чтобы выполнялся принцип суперпозиции должно содержать мировые константы 3) Должно решаться для любых квантово-мех. задач.

$$\frac{\partial \psi}{\partial x} = ik_x \psi, \quad \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} = -k_x^2 \psi, \quad \Delta \psi = \nabla^2 \psi = -k^2 \psi = -(p/\hbar)^2 \psi, \quad \frac{\partial \psi}{\partial t} = -i\omega \psi = -i \frac{\varepsilon}{\hbar} \psi,$$

$$\varepsilon = p^2 / 2m,$$

$$i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} = \varepsilon \psi = \frac{p^2}{2m} \psi = -\frac{\hbar^2}{2m} \Delta \psi, \quad -\frac{\hbar^2}{2m} \Delta \psi = i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} \quad \text{для своб. микрочастицы, Мы будем}$$

рассм. потенциальные поля, энергия в ктр. хар-ся  $\frac{p^2}{2m} = E - U$ , тогда

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \Delta \psi + U\psi = i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t}$$

- Ур-е ШРЕДИНГЕРА. Если силовое поле стационарно, то  $\psi(\vec{r}, t) = \psi(\vec{r})e^{-i\omega t}$ , подставляя в Ур-е Шредингера и сокращая на  $e^{-i\omega t}$ , получаем Ур-е для стационарных состояний

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \Delta \psi(\vec{r}) + U\psi(\vec{r}) = E\psi(\vec{r}) \quad \text{Статистич. смысл пси ф-ции.} \quad dP = |\psi|^2 dV,$$

квадрат модуля пси-ф-ии определяет вероятность  $dP$  того, что частица будет обнаружена в пределах объема  $dV$ , условия ктр. должна удовлетворять пси-ф-ия: непрерывная, конечная, однозначная, производные непрерывны. Вычтем из ур-я Ш.

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2 \psi(x,t)}{\partial x^2} + U(x,t)\psi(x,t) = i\hbar \frac{\partial \psi(x,t)}{\partial t}$$

комплексно сопряженное ему ур-е

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2 \bar{\psi}}{\partial x^2} + U\bar{\psi} = -i\hbar \frac{\partial \bar{\psi}}{\partial t}$$

получим

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial}{\partial x} \left( \bar{\psi} \frac{\partial \psi}{\partial x} - \psi \frac{\partial \bar{\psi}}{\partial x} \right) = i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \left( \bar{\psi} \frac{\partial \psi}{\partial t} + \psi \frac{\partial \bar{\psi}}{\partial t} \right)$$

или

$$\frac{\partial}{\partial t} |\psi|^2 + \frac{\partial}{\partial x} \left( -\frac{i\hbar}{2m} \left( \bar{\psi} \frac{\partial \psi}{\partial x} - \psi \frac{\partial \bar{\psi}}{\partial x} \right) \right) = 0$$

откуда

$$\frac{\partial}{\partial t} |\psi|^2 + \text{div} \left( -\frac{i\hbar}{2m} (\bar{\psi} \cdot \nabla \psi - \psi \cdot \nabla \bar{\psi}) \right) = 0$$

где выражение в скобках и есть вектор

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div} \vec{j} = 0$$

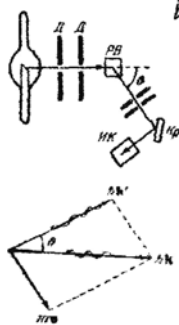
плотности потока вероятности, по аналогии с уравнением непрерывности

Принцип суперпозиции. Пусть в состоянии с волновой функцией  $\psi_1(\vec{r})$  некоторое измерение приводит с достоверностью к определенному результату 1, а в состоянии с волновой функцией  $\psi_2(\vec{r})$  - к результату 2. Тогда всякая линейная комбинация  $\psi_1$  и  $\psi_2$ , т.е. всякая волновая функция вида  $c_1\psi_1 + c_2\psi_2$ , где  $c_1$  и  $c_2$  - постоянные, дает состояние, в котором то же измерение дает либо результат 1, либо результат 2. Вероятности проявления этих результатов равны  $c_1^2$  и  $c_2^2$  соответственно. Если  $\psi_1(\vec{r}, t)$  и  $\psi_2(\vec{r}, t)$

$$\psi = \sum_n c_n \psi_n$$

являются решениями уравнения Шредингера, то и любая их лин. комб. также является решением уравнения Шредингера.

## 2. Эффект Комптона. Дуализм волновых и корпускулярных свойств излучения.



**Эффект Комптона.** При рассеивании рентгеновских лучей различными веществами (парафин), в рассеянных лучах наряду с излучением первоначальной длины волны  $\lambda$  содержатся также лучи большей длины волны  $\lambda'$ . Разность  $\Delta\lambda = \lambda' - \lambda$  оказалась зависящей только от угла  $\vartheta$ . От длины волны  $\lambda$  и от природы рассеивающего вещества  $\Delta\lambda$  не зависит. (D – диафрагмы выделяют узкий пучок монохром. рентгеновского излучения, PВ – рассеивающее в-во, Кр – кристалл, ИК – ионизац. камера). Особенности эффекта Комптона объясняется, рассматривая рассеяние как процесс упругого столкновения рентгеновских фотонов с практически свободными электронами.

Пусть на покоящ. своб. электрон падает фотон с энергией  $\hbar\omega$  и импульсом  $\hbar\mathbf{k}$ .

Энергия э-на до столкновения  $mc^2$ , импульс = 0. После столкн. э-н будет обладать импульсом  $\mathbf{p}$  энергией  $c\sqrt{p^2 + m^2c^2}$ . Энергия и импульс фотона станут равными  $\hbar\omega'$  и  $\hbar\mathbf{k}'$ . Из законов

сохр. энергии и импульса получаем:  $\hbar\omega + mc^2 = \hbar\omega' + c\sqrt{p^2 + m^2c^2}$  (1) и  $\hbar\mathbf{k} = \mathbf{p} + \hbar\mathbf{k}'$  (2), делим (1) на  $c$

$\sqrt{p^2 + m^2c^2} = \hbar(k - k') + mc$ ;  $\omega/c = k$ , возводим в квадрат  $p^2 = \hbar^2(k^2 + k'^2 - 2kk' \cos \vartheta) + 2\hbar mc(k - k')$  из (2)

следует  $p^2 = \hbar^2(\mathbf{k} - \mathbf{k}')^2 = \hbar^2(k^2 + k'^2 - 2kk' \cos \vartheta)$ ;  $\vartheta = \hat{\mathbf{k}} \cdot \hat{\mathbf{k}}'$ ;  $mc(k - k') = \hbar kk'(1 - \cos \vartheta)$  Умножим на  $2\pi$  и разделим на  $mckk'$  получим  $2\pi/k' - 2\pi/k = (2\pi\hbar/mc) \cdot (1 - \cos \vartheta)$  учитывая  $2\pi/k = \lambda$  придем к ф-ле

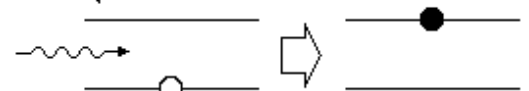
$\Delta\lambda = \lambda' - \lambda = \lambda_c(1 - \cos \vartheta)$  где  $\lambda_c = 2\pi\hbar/mc$  **КОМПТОНОВСКАЯ ДЛИНА ВОЛНЫ.** (Для э-на  $\lambda_c = 0,0243\text{Å}$ )

Билет №7

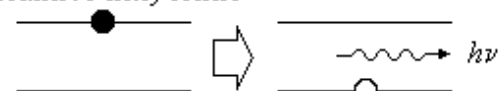
1. Принцип работы лазера. Особенности лазерного излучения. Основные типы лазеров, их применение.

Лазеры –устройства, при прохождении через ктр. э/м волны, усиливаются за счет открытого Эйнштейном вынужденного излучения. Принцип

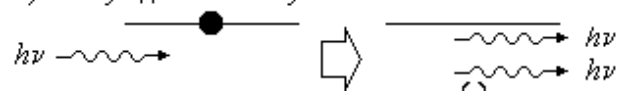
а) Поглощение



б) Спонтанное излучение



в) Вынужденное излучение

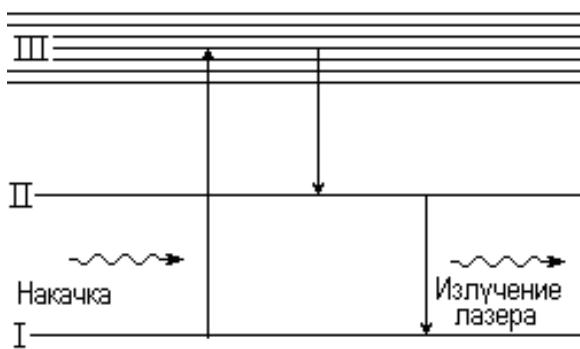


○ – невозбужденный атом с энергией  $E_i$   
● – возбужденный атом с энергией  $E_j$



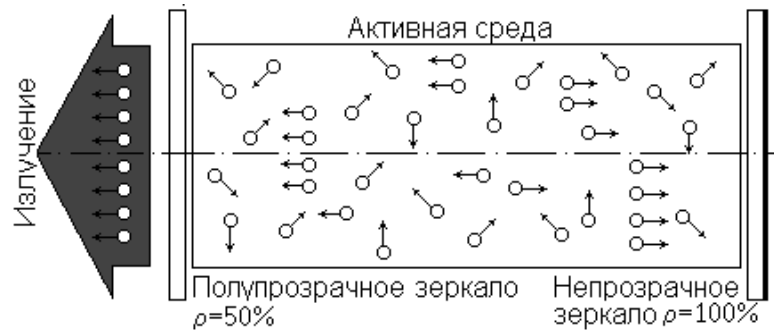
работы: Когда среда поглощает энергию (доставленную любым способом, например, фотонами), то ее часть запасается (поглощается) в виде энергии возбужденных атомов или молекул (рис. 1а). Молекула, атом или ион из возбужденного состояния может перейти на более низкий энергетический уровень (рис. 1б) самопроизвольно (спонтанно) или под действием внешнего электромагнитного излучения (вынужденно) с частотой, равной частоте кванта, испущенного спонтанно (рис. 1в). Эти переходы могут сопровождаться излучением, называемым соответственно спонтанным или

вынужденным, причем частота излучения определяется соотношением:  $h\nu = E_j - E_i$ , где  $E_j$  и  $E_i$  — энергетические уровни, между которыми осуществляется переход,



сопровождающийся излучением кванта энергии, дополнительного к кванту внешнего электромагнитного излучения, его вызвавшему. Если кванты спонтанного излучения испускаются в случайных направлениях, то квант вынужденного излучения испускается в том же направлении, что и квант внешнего электромагнитного поля. Причем частота, фаза и поляризация вынужденного и

внешнего излучений совпадают, то есть оба кванта полностью тождественны (рис. 1в). Под действием электромагнитного излучения могут происходить переходы не только с более высокого энергетического уровня на более низкий, но и в обратном направлении, что



соответствует акту поглощения. Для того чтобы преобладали переходы, при которых происходит излучение энергии, необходимо создать инверсную населенность возбужденного уровня  $E_j$ , то есть создать повышенную концентрацию атомов или молекул на этом уровне. Процесс создания инверсной населенности — *накачка*. Для создания инверсной населенности прим. 3-х уровневая схема: 1) молекулы привнесенной извне энергией переводятся из основного I в возб. III сост. Уровень III — такой, что время жизни молекул очень мало  $10^{-8}$ , если на ур-не II вр. жизни мол-л  $10^{-3}$ , то молекулы спонтанно без излучения переходя с ур-ня III будут накапливаться на ур-не II (*метастабильном*). Созданная т.о. инверсная населенность обеспечит усл-я для усиления излучения. среда в ктр. создана инверсная населенность — *активная*. Однако генерация оптич. колебаний может возникнуть только в том случае, если вынужденное излучение, раз возникнет будет вызывать новые акты. Для создания такого пр-са активную среду помещают в оптич. резонатор. Опт. резонатор — сист. из 2 зеркал между ктр. располагается активная среда. Важнейшее св-во зеркал — высокий коэф. отражения. С ур-ня II на I могут происходить и спонтанные и вынужденные переходы. При спонт. переходе одного из атомов испускается фотон, ктр. вызывает вынужденные переходы др. атомов, тоже сопровождающиеся излучением фотонов. Развивается лавинообразный процесс. Оптический резонатор ориентирует направление движ фотонов вдоль оси кристалла. При достижении опр. мощности излучение выходит через зеркала (особенно через полупрозрачное).

*Особенности:* 1) выс. монохроматичность 2) малая расходимость пучка 3) больш. интенсивность 4) выс. когерентность

*Типы лазеров:* 1) твердотельные 2) полупроводниковые 3) жидкостные 4) газовые

*Применение:* 1) высокоточная мех. обработка 2) в медицине (скальпель) 3) Оружие

2. Деление тяжелых ядер, цепные реакции. Термоядерный синтез.

Ядерные реакции – столкновение между собой ядер или элементарных частиц. Деление ядра. Происходит при облучении ядра нейтронами. Образуются осколки деления примерно равных масс (чаще всего в отношении 2 : 3). Осколки перегружены нейтронами, в результате чего они выделяют по несколько нейтронов, большинство испускается мгновенно, часть (0,75%) с запаздыванием до 1 мин.

Ядра  $^{238}\text{U}$  делятся только нейтронами с энергией не меньше 1 МэВ. При меньших – поглощаются ядром U без последующего деления. → образуется возбужденное ядро  $^{239}\text{U}$ , энергия возбуждения которого выделяется в виде  $\gamma$ -фотона. (Это процесс радиационного захвата). Далее ядро распадается → Np (нептуний) → Pu (плутоний)

Цепные реакции. Испускание при делении ядер  $^{235}\text{U}$ ,  $^{239}\text{Pu}$ ,  $^{233}\text{U}$  нескольких нейтронов делает возможным осуществление цепной ядерной реакции. Испущенные при делении 1 ядра  $z$  нейтронов могут вызвать деление  $z$  ядер, в результате будет испущено  $z^2$  нейтронов, которые вызовут деление  $z^2$  ядер, и т.д.

Термоядерный синтез. Для синтеза ядер (слияние легких ядер в одно) необходимы очень высокие температуры. Чтобы преодолеть потенциальный барьер, обусловленный кулоновским отталкиванием, ядра с порядковым номером должны обладать энергией  $E = Z_1 Z_2 e^2 / r_{\text{я}}$ , где  $r_{\text{я}}$  – радиус действия ядерных сил ( $\sim 2 \cdot 10^{-13}$  см). Для  $Z_1 = Z_2 = 1$   $E \approx 0,7$  МэВ. Тогда средняя температура порядка  $2 \cdot 10^9$  К. Но синтез может протекать и при меньшей температуре порядка  $10^7$  К.

В водородной бомбе реакция дейтерия и трития носит резонансный характер, сопровождается выделением энергии (17,6 МэВ).

## Билет №8

### 1. Работа выхода электрона из металла. Термоэлектронная эмиссия. Формула Ричардсона-Дэнимана.

Наименьшая энергия, которую необходимо сообщить эл-ону для того чтобы удалить его из твердого или жидкого тела в вакуум, называется *работой выхода*. Ее обозначают  $e\phi$ , где  $\phi$  – величина называемая потенциалом выхода. Работа выхода электрона из металла определяется выражением:  $e\phi = E_{p0} - E_F$ . (в предположении что температура металла равна 0 К ( $E_{p0}$  – полная работа выхода)). При других температурах работу выхода также определяют как разность глубины потенциальной ямы и уровня Ферми. Работа выхода сильно зависит от состояния пов-ности металла.

При температурах отличных от абсолютного нуля, имеется некоторое кол-во эл-нов энергия которых достаточна для того чтобы преодолеть потенциальный барьер на границе металла. При повышении температуры их кол-во растет. Испускание эл-онов нагретым металлом называется *термоэлектронной эмиссией*. Ее

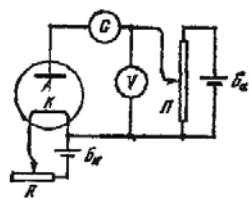


Рис. 61.1.

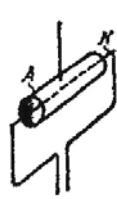


Рис. 61.2.

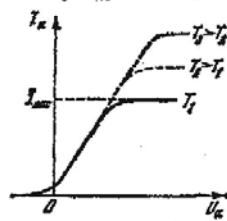


Рис. 61.3.

исследование осуществляется с помощью вакуумного диода, в котором находятся 2 электрода – катод и анод. Катод нагревается током от внешней батареи, а на оба электрода подается напряжение от анодной батареи. При постоянном токе накала катода ВАХ диода имеет вид на рисунке. С ростом  $U_a$  все больше электронов отсасывается электр. полем к аноду и при определенном значении  $U_a$  все вылетевшие из катода эл-оны получают возможность достигнуть

анода. Дальнейший рост  $U_a$  не может увеличить силу анодного тока – ток достигает насыщения. Ток насыщения характеризует эмиссию. Если в единицу времени с единицы поверхности катода вылетает  $N$  эл-онов, то плотность тока насыщения будет равна  $j_{\text{нас}} = Ne$ . Изменяя плотность тока насыщения при различной силе тока накала можно найти кол-во эл-онов, вылетающих с единицы пов-ности при разных температурах.

$j_{\text{нас}} = AT^2 \exp(-e\phi / kT)$  – формула Ричардсона-Дешмана.  $A$  – конст. График этой ф-ции – ветвь параболы в первой плоскости. Формула Ричардсона отличается только наличием  $T^{1,2}$  вместо  $T^2$ .

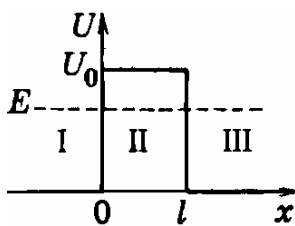
### 2. Структура атомного ядра. Характеристики ядер: заряд, размеры, масса, энергия связи. Свойства и обменный характер ядерных сил.

Ядра состоят из нуклонов (протонов и нейтронов).  $Q_p = +e$ ;  $M_p = 938,28$  МэВ = 1836  $M_e$ ;  $S_p = S_n = 1/2$ ;  $Q_n = 0$ ;  $M_n = 939,57$  МэВ. В свободном состоянии  $n = p + e^- + \bar{\nu}$ .  $\mu_p = \mu_n = -3/2$ . **Характеристики атомного ядра: Зарядовое число  $Z$**  – кол-во  $p$  в ядре, определяет его

заряд =  $+Ze$ .  $Z$  – порядковый номер эл-та в таблице Менделеева (атомный номер).  
 Число нуклонов –  $A$  – **массовое число ядра**. Число нейтронов –  $N_n = A - Z$ .  
 Обозначения ядер: *Изотоп* – ядра с одинаковым  $Z$ , разными  $A$ . *Изобары* – одинаковое  $A$ . *Изотоны* – одинаковое  $N$ . *Изомеры* – одинаковые  $Z$  и  $A$  и разный период полураспада. **Размер ядра**: В первом приближении – шар, радиус =  $1,3 \cdot 10^{-13} \cdot A^{1/3}$  см =  $1,3 \cdot A^{1/3}$  Ферми. **Масса ядра  $m_{\text{я}}$** : всегда меньше суммы масс нуклонов (т.к. часть – на **энергию связи**:  $E_{\text{св}} = c^2 \{ [Zm_p + (A-Z)m_n] - m_{\text{я}} \}$  = работе, которую нужно совершить, чтобы разделить образующие ядро нуклоны и удалить их друг от друга на расстояние при котором они не взаимодействуют.  $E_{\text{св}} = c^2 \{ [Zm_H + (A-Z)m_n] - m_{\text{я}} \}$ , где  $m_H$  – масса водорода,  $m_a$  – масса атома. **Дефект массы**:  $\Delta = [Zm_p + (A-Z)m_n] - m_{\text{я}}$ . **Свойства и обменный характер**. Нуклоны притягиваются друг к другу, удерж. на расст.  $\approx 10^{-13}$  см, несмотря на сильное кулоновское отталкивание между протонами. Ядерное взаимодействие между нуклонами – сильное взаимодействие. **Особенности ядерных сил: 1)** короткодействующие ( $\approx 10^{-13}$  см). Если  $< 10^{-13}$  см, то нуклоны отталкиваются. **2)** не зависят от заряда нуклонов. **3)** зависят от взаимной ориентации спинов нуклонов. **4)** не являются центральными (т.к. зависят от ориентации спинов). **5)** обладают свойством насыщения. Каждый нуклон в ядре взаимодействует с ограниченным числом нуклонов. **Взаимодействие между нуклонами передается посредством виртуальных частиц  $\pi$  мезонов** (носителей ядерных сил). Существуют  $\pi^+$ ,  $\pi^-$ ,  $\pi^0$  мезоны. Заряд  $\pi^+$ ,  $\pi^-$  = заряду  $e$ . Масса =  $273 m_e$ . Масса  $\pi^0 = 264 m_e$ .  $S(\text{всех}) = 0$ . Все  $\pi$  мезоны не стабильны. В результате виртуальных процессов:  $p \leftrightarrow n + \pi^+$ ;  $n \leftrightarrow p + \pi^-$ ;  $p \leftrightarrow p + \pi^0$ ;  $n \leftrightarrow n + \pi^0$  Нуклон в облаке виртуальных  $\pi$  мезонов.

Билет №9

1. Прохождение частицы через потенциальный барьер. Туннельный эффект. Сканирующий туннельный микроскоп.



Потенциальный барьер. Пусть ч-ца движущаяся слева направо, встречает на своем пути потенц. барьер высоты  $U_0$ . Рассм.

случай  $E < U_0$  тогда  $\frac{d^2\psi}{dx^2} + \frac{2m}{\hbar^2} E\psi = 0$  (1) для обл. I и III

$\frac{d^2\psi}{dx^2} + \frac{2m}{\hbar^2} (E - U_0)\psi = 0$  (2) для обл-ти II причем  $E - U_0 < 0$ .

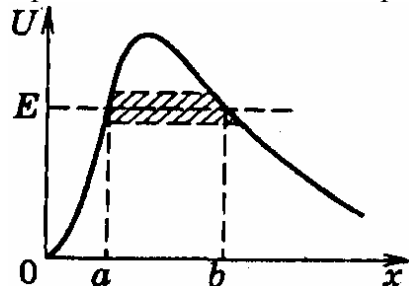
Будем искать реш. ур-я (1) в виде  $\psi = \exp(\lambda x)$  подставляя получаем  $\lambda^2 + \frac{2m}{\hbar^2} E = 0$

отсюда  $\lambda = \pm i\alpha$ , где  $\alpha = \frac{1}{\hbar} \sqrt{2mE}$ , т.о. реш. ур-я (1) имеет вид

$\psi_1 = A_1 \exp(i\alpha x) + B_1 \exp(-i\alpha x)$  для обл-ти I,  $\psi_3 = A_3 \exp(i\alpha x) + B_3 \exp(-i\alpha x)$  для обл-ти III,

аналогично для ур-я (2)  $\psi_2 = A_2 \exp(\beta x) + B_2 \exp(-\beta x)$  для обл. II,  $\beta = \frac{1}{\hbar} \sqrt{2m(U_0 - E)}$ .

Заметим, что реш. вида  $\exp(i\alpha x)$  соотв. волне распротр. в положит. направлении оси  $x$ , а реш. вида  $\exp(-i\alpha x)$  - в противополож. В обл. III имеется только волна, прошедшая



через барьер и распр. слева направо следов.  $B_3=0$ . Для того чтобы  $\psi$  была непрерывна должно вып. усл.

$\psi_1(0) = \psi_2(0)$  и  $\psi_2(l) = \psi_3(l)$ . Для того чтобы  $\psi$  не имела изломов необх.:  $\psi_1'(0) = \psi_2'(0)$  и  $\psi_2'(l) = \psi_3'(l)$ ,

причем  $R = |B_1|^2 / |A_1|^2$  - отношение квадратов модулей амплитуд отраженной и падающих волн определяет вер-

ть отражения частицы от потенц. барьера – *коэф. отражения*.  $D = |A_3|^2 / |A_1|^2$  - отнош. квадратов модулей амплитуд прошедшей и падающей волн – *вер-ть прохождения частицы через барьер – коэф. прохождения*.  $R + D = 1$ . Из ур-ний получившихся из условий непрерывности и гладкости пси-ф-ии, находим

$$D \approx \exp(-2\beta l) = \exp\left(-\frac{2}{\hbar} \sqrt{2m(U_0 - E)l}\right), \text{ т.е. вер-ть прохождения частицы через потенц. барьер сильно зависит от ширины барьера } l \text{ и от его превышения над } E. \text{ В случае барьера произв. формы}$$

$$D \approx \exp\left(-\frac{2}{\hbar} \int_a^b \sqrt{2m(U(x) - E)dx}\right). \text{ При преодолении потенц. барьера ч-ца как бы проходит через туннель в этом барьере – рассм. нами явление – } \textit{туннельный эффект}.$$

## 2. Атом во внешнем магнитном поле. Эффект Зеемана.

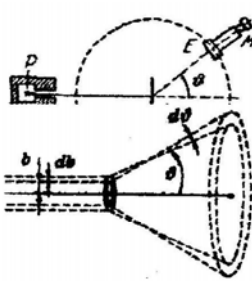
При помещении магнитного момента  $\vec{p}^M$  во **внешнее магнитное поле** с индукцией  $\vec{B}$ , он приобретает дополнительную энергию за счет магнитного взаимодействия  $W = -\vec{p}^M \vec{B} = -p_z^M B$ . Поэтому, если изолированный атом с энергией  $E$  в состоянии с квантовым числом  $J$  попадает в магнитное поле, то энергия уровня  $E$  изменяется так, что это изменение, в зависимости от взаимной ориентации магнитного момента и поля, соответствует одному из  $2J+1$  возможных значений  $\Delta E_j = -p_{Jz}^M B = g \mu_B m_j B. \Rightarrow$

Расщепление  $\Delta E = g \mu_B B = g \Delta E_0$ . **Эффект Зеемана** - эффект расщепления спектральных линий в магнитном поле. Наиболее простой случай соответствует расщеплению одиночной линии, обусловленной переходами между энергетическими уровнями, для которых  $S=0 \Rightarrow g = 1 + \frac{J(J+1) + S(S+1) - L(L+1)}{2J(J+1)}$ .  $g=1 \Rightarrow \Delta E = \Delta E_0$ . Смещение частоты  $\Delta \omega_0 = \frac{\Delta E_0}{\hbar} = \frac{\mu_B}{\hbar} \cdot B$  - нормальное смещение. Такой случай расщепления спектральной линии на

зеемановский триплет называется **простым** или **нормальным эффектом Зеемана**. Для переходов между уровнями с  $S \neq 0$  у расщепленной спектральной линии оказывается больше трех компонент, а величина расщепления отличается от нормального. Такое расщепление спектральных линий называется **сложным** или **аномальным эффектом Зеемана**.

## Билет №10

### 1. Ядерная модель атома Резерфорда-Бора. Постулаты Бора.



**10 Опыты Резерфорда по рассеянию α-частиц.** Выделяемый отв. узкий пучок α-частиц, испускаемых радиоакт. в-вом P, падает на тонкую метал. фольгу Φ. При прохожд. через фольгу α-частицы отклонялись от первонач. направления движения на различ. углы θ. Нектр. частицы откл. на θ порядка 180°. Такое сильное откл. возможно только при наличии внутри атома оч. сильного эл. поля, ктр. создается зарядом, связанным с большой массой и сконц. в оч. малом объеме. В 1911г. Резерфорд предложил **ядерную модель атома**. Атом – сист. зарядов, в центре ктр. расположено тяжелое полож. ядро с зарядом Ze (размер 10<sup>-12</sup> см), а вокруг ядра расположены Z э-нов, распред. по всему объему, занимаемому атомом. Почти вся масса атома сосредоточена в ядре. Для того чтобы испытать рассеяние на угол, от θ до θ + dθ, частица должна пролететь вблизи одного из ядер по тр-ии, прицельный параметр (расст. от ядра до первонач. направления α-част.) ктр. от b до db. Относительное число α-частиц, пролетающих вблизи одного из ядер по тр-ии с приц. парам. от b до db равно

$$\frac{dN_\theta}{N} = na \left( \frac{Ze^2}{m_\alpha v^2} \right)^2 \frac{d\Omega}{\sin^4(\theta/2)}$$

; dN<sub>θ</sub> - поток частиц рассеиваемых в пределах углов от θ до θ + dθ, N -

полный поток частиц в пучке, n - число атомов в ед. объема, a - толщ. фольги, v - скор. пучка, dΩ - телесный угол, в пределах ктр. заключены напр-ия, соответствующие углам рас-ия от θ до θ + dθ.

**Линейчатые спектры атомов. Квантовая модель атома водорода Н.Бора.**



Излучение невз-их др. с др. атомов состоит из отдельных спектральных линий. В соотв. с этим спектр испускания атомов назыв. **линейчатым**. Линии в спектрах атомов объединяются

в группы или **серии линий**.  $\omega = R \left( \frac{1}{m^2} - \frac{1}{n^2} \right)$  **обобщенная ф-ла Бальмера**. При заданном n

число n принимает все целочисл. зн-я, начиная с m+1. При m=1 серия Лаймана, m=2 сер. Бальмера, m=3 сер. Пашена, и т.д.

R=2,07·10<sup>16</sup> с<sup>-1</sup> - пост. Ридберга. При n→∞ частота линии в кажд. серии →  $\frac{R}{m^2}$ , ктр. наз-ся **границей серии** (H<sub>∞</sub> рис.)

Возьмем ряд T(n)=R/n<sup>2</sup>, частота любой линии спектра водорода м.б. представлена в виде разности 2-ух чисел ряда.

Эти числа - **термы**, (напр. частота второй линии серии Пфунда T(5)-T(7)). Для др. атомов  $\omega = T_1(m) - T_2(n)$ .

**Квантовая модель атома водорода Н.Бора.**

**Постулаты Бора:** 1. Из всех возможных движений в атоме осуществляется только дискретное движение по так называемым «квантовым орбитам» с определенной энергией E<sub>n</sub> (n-целое число - номер орбиты)

2. При переходе с орбиты на орбиту э-н излучает или поглощает квант энергии.  $\hbar\omega = E_n - E_m$ .

Для гарм. осциллятора осуществляются только такие состояния, энергия ктр. равна E<sub>n</sub> = nħω. Коорд. осцил. - q,

полная эн. E<sub>n</sub> =  $\frac{p^2}{2m} + \frac{m\omega^2 q^2}{2} = n\hbar\omega$ , откуда  $\frac{q^2}{2n\hbar/m\omega} + \frac{p^2}{2mn\hbar\omega} = 1$ , т.е. эллипс, полуоси



$a = \sqrt{2n\hbar/m\omega}$  и  $b = \sqrt{2mn\hbar\omega}$ , Площадь эл-са S<sub>n</sub> = πab = 2πħn т.о.

ΔS = pΔq действ. на э-н, является центральной следов. M=const,

$\oint M d\varphi = 2\pi\hbar n$ ,  $M = n\hbar$ ,  $E_n = -\frac{m_e e^4 Z^2}{2\hbar^2 n^2}$  (n=1,2,3,...) При переходе атома

водорода из сост. n в сост. m  $\hbar\omega = E_n - E_m = -\frac{m_e e^4}{2\hbar^2} \left( \frac{1}{n^2} - \frac{1}{m^2} \right)$ ;  $\omega = \frac{m_e e^4}{2\hbar^3} \left( \frac{1}{m^2} - \frac{1}{n^2} \right)$

обобщенная ф-ла Бальмера.



2. Примесная проводимость полупроводников. Концентрация основных и неосновных носителей в полупроводнике p-типа. Уровень Ферми примесного полупроводника p-типа. Температурная зависимость проводимости примесного полупроводника p-типа.

Примесная проводимость полупроводников. Примесная проводимость полупроводников возникает, если некоторые атомы данного полупроводника заменить в узлах кристаллической решетки атомами, валентность которых отличается на единицу от валентности основных атомов.

Концентрация основных и неосновных носителей в полупроводниках p-типа.

В полупроводнике с примесью, валентность которой на единицу меньше валентности основных атомов, имеется только один вид носителей тока – дырки. Такой полупроводник обладает дырочной проводимостью и является полупроводником р-типа. Атомы примеси, вызывающие появление дырок, называют *акцепторами*.



Акцепторные уровни оказывают существенное влияние на электрические св-ва кристалла, если они расположены недалеко от потолка валентной зоны. Образованию дырки отвечает переход э-на из валентной зоны на акцепторный уровень. Обратный переход соответствует разрыву одной из четырех ковал. связей атома примесей с его соседями и рекомбинации образовавшегося при этом электрона и дырки. Уровень Ферми примесного полупроводника р-типа. Уровень Ферми располагается в

нижней половине запрещенной зоны.

При повышении температуры уровень Ферми ( $\epsilon_F$ ) в полупроводниках обоих типов смещается к середине запрещенной зоны.

Температурная зависимость проводимости примесного полупроводника р-типа.

При повышении температуры концентрация примесных носителей тока быстро достигает вершины. Это значит, что практически освобождаются все донорные или заполняются электронами все *акцепторные* уровни. По мере роста температуры все больше сказывается собственная проводимость полупроводника, обусловленная переходом электронов из валентной зоны в зону проводимости. → при высоких температурах проводимость полупроводника складывается из примесной и собственной проводимостей. При низких температурах преобладает примесная, а при высоких – собственная проводимость.

#### Билет №11

1. Тепловое излучение. Интегральные и спектральные характеристики излучения. Закон Кирхгофа. Закон Стефана-Больцмана. Закон смещения Вина.

**Тепловое излучение** - испускание электромагнитных волн за счет внутренней энергии тел. Если распределение энергии между телом и излучением остается неизменным для каждой длины волны, состояние системы тело—излучение будет **равновесным** (только для теплового изл.).

Поток энергии, испускаемый единицей пов-ти излучающего тела по всем направлениям (в пределах телесного угла  $2\pi$ ), назыв. **энергетической светимостью** тела ( $R$ ).  $R=f(T)$ . Излучение состоит из волн различных частот  $\omega$ . Поток энергии испускаемый ед. пов-ти тела в интервале частот  $d\omega$ , через  $dR_\omega$ .  $dR_\omega = r_\omega d\omega$ ,  $r_\omega$  -

испускательная способность тела.  $r_\omega = f(\omega, T)$ .  $R_T = \int dR_{\omega T} = \int_0^\infty r_{\omega T} d\omega$

Пусть на элементарную площадку падает поток лучистой энергии  $d\Phi_\omega$ , часть потока  $d\Phi'_\omega$  будет поглощена телом. Безразмерная вел.  $a_{\omega T} = \frac{d\Phi'_\omega}{d\Phi_\omega}$  - **поглощательная способность** тела. ( $T\lambda_m = b$ ) Если  $a_{\omega T} = 1$  то тело

**абсолютно черное** Тело для ктр.  $a_{\omega T} < 1$  - **серое**.

Откуда вытекает **закон Кирхгофа**: отношение испускательной и поглощательной способностей не зависит от природы тела, оно является для всех тел одной и той же (универсальной) функцией частоты (длины волны) и температуры:

$\frac{r_{\omega T}}{a_{\omega T}} = f(\omega, T)$ ,  $f(\omega, T)$  - испуск. сп-ть абс. черного тела.

**Закон Стефана - Больцмана**.  $R^* = \int_0^\infty f(\omega, T) d\omega = \sigma T^4$   $\sigma$  - постоянная Стефана - Больцмана,

$\sigma = 5,7 \cdot 10^{-8} \text{Вт}/(\text{м}^2 \cdot \text{К}^4)$ ,  $T$  - термодинамическая темп.,  $R^*$  - энергетич. светимость абс. черного тела.

$T\lambda_m = b$  - **закон смещения Вина**.  $b = 2,90 \cdot 10^{-3} \text{ м} \cdot \text{К}$ .

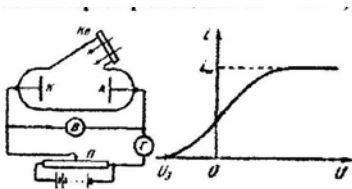
2. Принцип неразличимости тождественных частиц в квантовой механике. Симметричные и антисимметричные состояния тождественных микрочастиц. Фермионы и бозоны. Принцип Паули.

**Принцип тождественности одинаковых микрочастиц. Симметричные и антисимметричные состояния тождественных микрочастиц. Фермионы и бозоны.**

Основа квантовой статистики – принципиальная неразличимость одинаковых частиц. Перестановка местами двух квантовых частиц не приводит к новому микросостоянию. Волновые ф-ии должны быть симметричными или антисимметричными по отношению к перестановке любой пары частиц, причем первый случай имеет место для частиц с целым спином, а второй с полуцелым. Для системы частиц, описываемой антисимметричными ф-ями справедлив принцип Паули: в каждом квантовом состоянии может находиться одновременно не более одной частицы. Статистика, основанная на этом принципе, называется статистикой Ферми-Дирака. Частицы, подчиняющиеся этой статистике – **фермионы**. К их числу относят все частицы с **полуцелым** спином. Статистика Бозе-Эйнштейна, ктр. подчиняются частицы с **целым** спином. Частицы подчиняющиеся этой статистике – **бозоны**. Не выполняется принцип Паули; вероятность  $P$  возникновения бозона в состоянии, в ктр. уже имеется  $n$  частиц, пропорциональна  $n$ . Обе статистики подчиняются принципу тождественности одинаковых микрочастиц.

### Билет №12

1. Фотоэффект, его законы. Уравнение Эйнштейна для фотоэффекта. Фотоны. Дуализм волновых и корпускулярных свойств излучения.



12 **Фотоэффект** – испускание электронов веществом под действием света.

$i_n$  - ток насыщения (все электроны испускаемые катодом попадают на анод)

$U_z$  – задерживающее напряжение (для обращения силы тока в 0). При таком напряжении ни один электрон не долетит до анода. Поэтому  $1/2 \cdot mv_m^2 = eU_z$ .

Чем больше частота, тем больше  $U_z$ . Эйнштейн: свет поглощается такими же

квантами  $\hbar\omega$ , как и по Планка испускается.  $\hbar\omega = (1/2)mv_m^2 + A$  - **ф-ла Эйнштейна**.  $A$  – работа выхода, наим. энергия, ктр. необходимо сообщить электрону, чтобы удалить его из тв. или жидкого тела в вакуум. Если  $A$  превышает энергию кванта  $\hbar\omega$ , электроны не могут покинуть металл. Для возникновения фотоэффекта необходимо

$\hbar\omega \geq A$ , или  $\omega \geq \omega_0 = A/\hbar$ ,  $\lambda \leq \lambda_0 = 2\pi\hbar c/A$ ;  $\lambda_0$  или  $\omega_0$  - **красная граница фотоэффекта**.  $I_n \propto \Phi$

2. Квантовые распределения Ферми-Дирака и Бозе-Эйнштейна. Их предельный переход в классическое распределение Максвелла-Больцмана.

При больших энергиях т.е. при  $E - E_F \gg kT$ , единицей в знаменателе ф-ции распредел. Ферми-Дирака можно пренебречь, тогда распределение эл-онов по состояниям с разной энергией принимает вид:

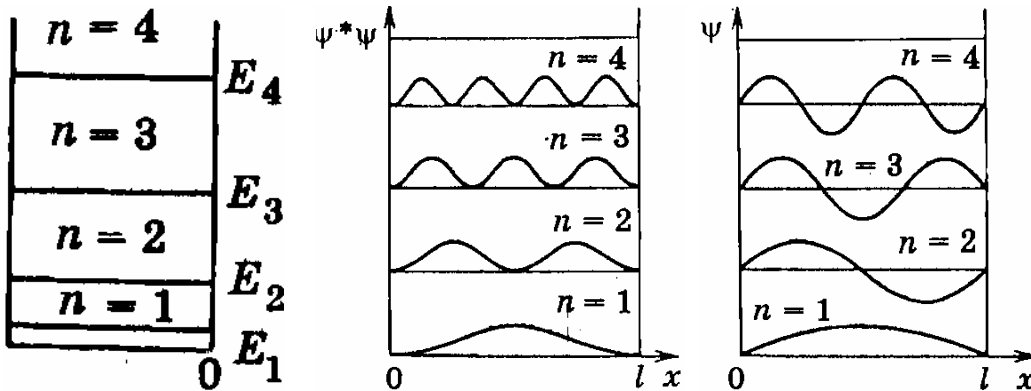
$$f(E) = \exp[-(E - E_F)/kT] = \text{const} \exp(-E/kT), \text{ т.е. переходит в ф-ю распредел. Больцмана, где}$$

$$\text{const} = \exp(E_F/kT) \text{ Для ф-ции распредел. Бозе-Эйнштейна: } \langle n_i \rangle = \frac{1}{\exp[(E_i - \mu)/kT] - 1} \text{ все также.}$$

### Билет №13

1. Частица в трехмерном потенциальном ящике. Энергетический спектр частицы. Понятие о вырождении энергетических уровней.

Найдем собств. зн-я энергии и соотв. им собств. ф-ии для частицы находящейся в



одномерной потенциальной яме с беск. выс. стенками. Пусть движение ограничено непроницаемыми для частицы стенками  $x=0$  и  $x=l$ .  $U=0$  при  $0 \leq x \leq l$ ,  $U=\infty$  при

$x < 0$  и  $x > l$ , Ур-е Шредингера  $\frac{d^2\psi}{dx^2} + \frac{2m}{\hbar^2}(E-U)\psi = 0$ , т.к. за пределы ямы частица вырваться не может, то  $\psi(0) = \psi(l) = 0$ .

В области где  $\psi \neq 0$ , ур-е имеет вид  $\frac{d^2\psi}{dx^2} + \frac{2m}{\hbar^2}E\psi = 0$ , вводим  $k^2 = \frac{2m}{\hbar^2}E$ , приходим к  $\psi'' + k^2\psi = 0$ , реш. имеет вид  $\psi(x) = a \sin(kx + \alpha)$ , т.к.  $\psi(0) = \psi(l) = 0$ , то  $\psi(0) = a \sin \alpha = 0$ , откуда  $\alpha = 0$ , тогда  $\psi(l) = a \sin kl = 0$ , т.е.  $kl = n\pi$  ( $n=1, 2, 3, \dots$ ),

откуда  $E_n = \frac{\pi^2 \hbar^2}{2ml^2} n^2$  ( $n=1, 2, 3, \dots$ ), спектр энергии – дискретный. Подставив зн-е  $k$  получим  $\psi_n(x) = a \sin(n\pi x/l)$ , для нахождения  $a$  воспользуемся условием нормировки

$$a^2 \int_0^l \sin^2 \frac{n\pi x}{l} dx = 1, \text{ откуда } a = \sqrt{2/l}, \text{ т.е.}$$

$$\psi_n(x) = \sqrt{2/l} \sin(n\pi x/l)$$

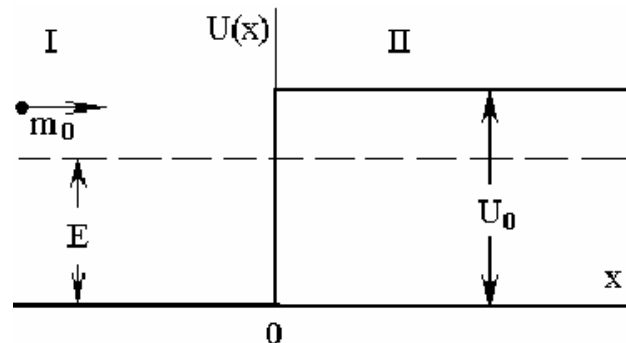
$n=1, 2, 3, \dots$  Ч-ца в 3-мер ящ.

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \left( \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) \psi(x, y, z) = E\psi(x, y, z)$$

$$0 \leq x \leq l, \quad 0 \leq y \leq l, \quad 0 \leq z \leq l;$$

$$\psi(x, y, z) = \psi_1(x)\psi_2(y)\psi_3(z), \quad E = \frac{\pi^2 \hbar^2}{2ml^2} (n_1^2 + n_2^2 + n_3^2)$$

Причем





при  $n_1 = n_2 = n_3 = 1$  будет  $E = \frac{3\pi^2 \hbar^2}{2ml^2}$ , а при  $n_1 = n_2 = 1, n_3 = 2$  или  $n_3 = n_2 = 1, n_1 = 2$  или  $n_1 = n_3 = 1, n_2 = 2$   $E = \frac{3\pi^2 \hbar^2}{ml^2}$  Когда одной энергии соотв. несколько равных сост. называется вырождением, а число этих сост. – кратностью вырождения.

2. Элементарные частицы, их основные характеристики. Симметрия и законы сохранения в мире элементарных частиц.

Симметрия и законы сохранения в мире элементарных частиц.

Симметрия. Каждой частице соответствует античастица.  $e^+$  и  $p^+$  отличаются от  $e^-$  и  $p^-$  знаком электрического заряда.  $n$  от  $\bar{n}$  знаком магнитного момента.  $e^+ + e^- = \gamma + \gamma$ .

Законы сохранения в мире элементарных частиц. В мире элементарных частиц есть 3С энергии, импульса, момента импульса + всех зарядов: барионного, электрического и трех лептонных.

3С барионного заряда  $B$ :  $B = +1$  для барионов;  $B = -1$  для антибарионов; для остальных  $B=0$ . Для всех процессов с участием барионов и антибарионов суммарный барионный заряд сохраняется.

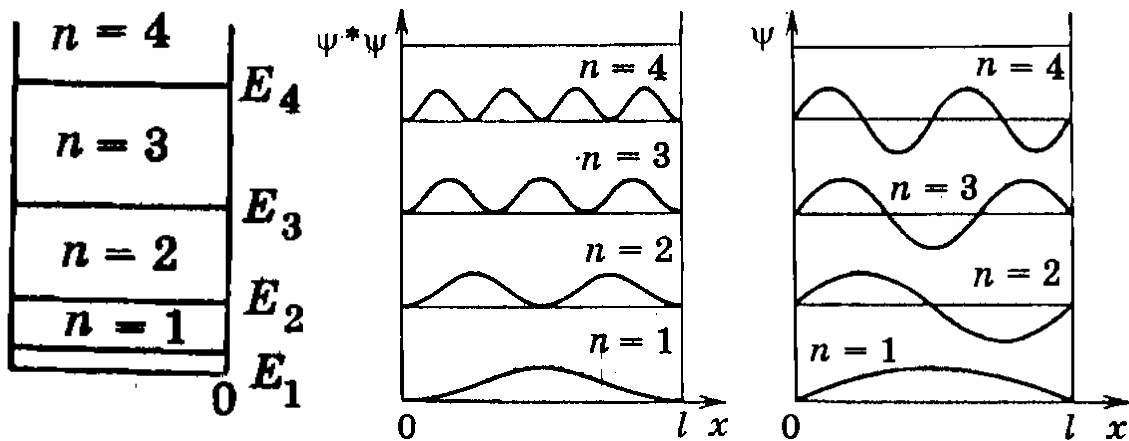
3С лептонных зарядов: электронный  $L_e$  ( для  $e$  и  $\nu_e$  (нейтрино)), мюонный  $L_\mu$  ( для  $\mu$  и  $\nu_\mu$  ), таонный  $L_\tau$  (для  $\tau$  и  $\nu_\tau$ ).  $L_e = L_\mu = L_\tau = +1$  (для лептонов);  $-1$  (для антилептонов). Для всех остальных  $L = 0$ . Для всех процессов с участием лептонов и антилептонов суммарный лептонный заряд сохраняется.

Существуют 3С странности  $S$ , очарования  $C$ , прелести  $b$ , изотопического спина.

#### Билет №14

1. Частица в одномерной потенциальной яме с бесконечно высокими стенками. Квантование энергии. Плотность вероятности нахождения частицы для различных состояний.

Найдем собств. зн-я энергии и соотв. им собств. ф-ии для частицы находящейся в одномерной потенциальной яме с беск. выс. стенками. Пусть движение



ограничено непроницаемыми для частицы стенками  $x=0$  и  $x=l$ .  $U=0$  при

$0 \leq x \leq l$ ,  $U=\infty$  при  $x < 0$  и  $x > l$ , Ур-е Шредингера  $\frac{d^2\psi}{dx^2} + \frac{2m}{\hbar^2}(E-U)\psi = 0$ , т.к. за пределы ямы частица вырваться не может, то  $\psi(0) = \psi(l) = 0$ .

В области где  $\psi \neq 0$ , ур-е имеет вид  $\frac{d^2\psi}{dx^2} + \frac{2m}{\hbar^2}E\psi = 0$ , вводим  $k^2 = \frac{2m}{\hbar^2}E$ , придем к  $\psi'' + k^2\psi = 0$ , реш. имеет вид  $\psi(x) = a \sin(kx + \alpha)$ , т.к.  $\psi(0) = \psi(l) = 0$ , то  $\psi(0) = a \sin \alpha = 0$ , откуда  $\alpha = 0$ , тогда  $\psi(l) = a \sin kl = 0$ , т.е.  $kl = n\pi$  ( $n = 1, 2, 3, \dots$ ),

откуда  $E_n = \frac{\pi^2 \hbar^2}{2ml^2} n^2$  ( $n=1,2,3,\dots$ ), спектр энергии – дискретный. Подставив зн-е  $k$  получим  $\psi_n(x) = a \sin(n\pi x/l)$ , для нахождения  $a$  воспользуемся условием нормировки  $a^2 \int_0^l \sin^2 \frac{n\pi x}{l} dx = 1$ , откуда  $a = \sqrt{2/l}$ , т.е.  $\psi_n(x) = \sqrt{2/l} \sin(n\pi x/l)$ .

## 2. Радиоактивность. Виды радиоактивных излучений. Эффект Мессбауэра.

Радиоактивностью называется самопроизвольное превращение одних атомных ядер (нестабильных) в другие, сопровождаемое испусканием элементарных частиц.

Радиоактивные процессы: 1)  $\alpha$ -распад, 2)  $\beta$ -распад, 3)  $\gamma$ -излучение ядер, 4) спонтанное деление тяжелых ядер, 5) протонная радиоактивность. Радиоактивное ядро – материнское, образующееся при распаде – дочернее. Радиоак-ть подразделяют на естественную и искусственную, принципиальных различий в них нет.

Закон радиоактивного распада. Отдельные радиоактивные ядра распадаются независимо друг от друга. Можно считать, что число ядер  $dN$ , распадающихся за малый промежуток времени  $dt$ , пропорционально как числу имеющихся ядер  $N$ , так и  $dt$ :  $dN = -\lambda N dt$ , где  $\lambda$  – постоянная распада, характерная для каждого рад. препарата (“–” т.к. убыль числа ядер). Проинтегрируем, получим:  $N = N_0 e^{-\lambda t}$ , где  $N_0$  – количество ядер в начальный момент,  $N$  – количество нераспавшихся ядер в момент времени  $t$ . Это закон рад-ого распада: число нераспавшихся ядер убывает со временем по экспоненте. Активность  $A = |dN/dt| = \lambda N$  – число ядер, распавшихся за ед. времени. [1 Бк (беккерель) = 1 распад/с или 1 Ки(кюри) =  $3,7 \cdot 10^{10}$  Бк]. Удельная активность – активность на ед. массы рад. препарата.

Период полураспада  $T$ : из условия  $N_0/2 = N_0 e^{-\lambda T}$ , откуда  $T = \ln 2/\lambda = 0,693/\lambda$ .

Среднее время жизни  $\tau = (1/N_0) \int_0^\infty t dN = (1/N_0) \int_0^\infty t \lambda N dt = (1/N_0) \int_0^\infty t \lambda N_0 e^{-\lambda t} dt = 1/\lambda$ .

Виды рад. излучений.

$\alpha$ -распад. Самопроизвольное испускание ядром  $\alpha$ -частицы (ядра  ${}^4_2\text{He}$ ):  ${}^A_Z X \rightarrow {}^{A-4}_{Z-2} Y + {}^4_2\text{He}$ . Спектр излучения  $\alpha$ -частицы дискретный (монохромные волны). Масса материнского ядра > массы дочернего. Энергия  $\alpha$ -частицы: 4-9 эВ.  $\alpha$ -частица, покидая ядро, преодолевает потенциальный барьер, высота которого больше ее энергии.

Внутренняя сторона барьера обусловлена ядерными силами, внешняя – кулоновскими. Преодолевает барьер благодаря туннельному эффекту.

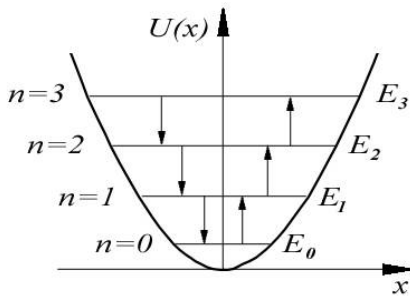
$\beta$ -распад. Самопроизвольный процесс, в котором исходное ядро превращается в другое ядро с тем же массовым числом  $A$ , но с  $Z$ , отличающимся от исходного на  $\pm 1$  (испускание  $e^-$  или захват). Виды: 1) электронный  $\beta^-$ -распад (испускается  $e^-$  и  $Z \rightarrow Z+1$ ); 2) позитронный  $\beta^+$ -распад (испускается  $e^+$  и  $Z \rightarrow Z-1$ ); 3) К-захват (ядро захватывает  $e^-$ , находящийся на К-ой оболочке и  $Z \rightarrow Z-1$ , сопровождается рентгеновским излучением)

$\gamma$ -излучение. Испускание возбужденным ядром при переходе его в нормальное состояние  $\gamma$ -квантов (их энергия 10кэВ – 5МэВ, спектр дискретный, т.к. дискретны энергетические уровни самих ядер).  $\gamma$ -распад – процесс внутриядерный ( $\beta$ -распад – внутринуклонный). Возбужденные ядра могут переходить в основное состояние, передавая энергию возбуждения внешним  $e^-$  – внутренняя конверсия электронов (эти  $e^-$  моноэнергетичны), явление сопровождается рентгеновским излучением.

## Билет №15

### 1. Уравнение Шредингера для гармонического осциллятора, анализ его решений.

Рассмотрим одномерный гармонический осциллятор, совершающий колебания вдоль оси  $x$  под действием возвращающей квазиупругой силы  $F = -kx$ . Потенциальная энергия:  $U(x) = kx^2/2 = m_0 \omega_0^2 x^2/2$ , где  $\omega_0^2 = k/m_0$  – собственная частота классического



гармонического осциллятора => квантово-механическая задача о гармоническом осцилляторе сводится к задаче о движении частицы в параболической потенциальной яме =>  $d^2\psi/dx^2 + 2m_0(E - m_0\omega_0^2 x^2/2)\psi/\hbar^2 = 0$   $-\infty < x < +\infty$ . Анализ показывает, что волновые функции, являющиеся решением уравнения, будут непрерывными и конечными не при всех значениях выражения  $2E/\hbar\omega_0$ , а лишь при  $E_n = (n+1/2)\hbar\omega_0$ ,  $n=0, 1, 2, 3, \dots$

Энергетические уровни гармонического осциллятора, в отличие, например, от случая прямоугольной потенциальной ямы, являются эквидистантными, т.е. расположены на одинаковом энергетическом расстоянии  $\Delta E = \hbar\omega_0$  друг от друга. Еще одной важной особенностью спектра является наличие так называемых нулевых колебаний.

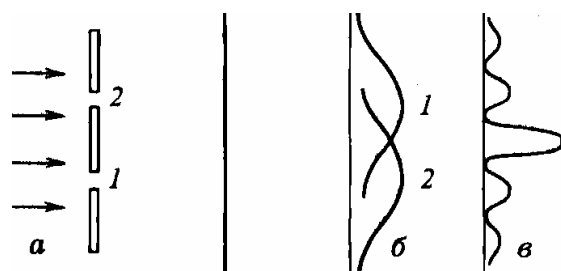
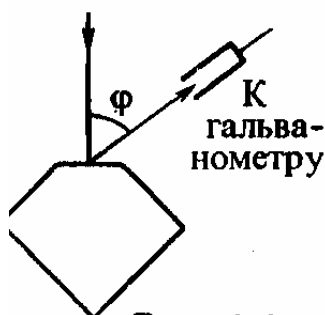
Волновые функции гармонического осциллятора имеют вид  $\psi_n(x) = e^{-\frac{x^2}{2a^2}} H_n(\frac{x}{a})$ ,  $n=0, 1, 2, \dots$ ,  $H_n(\xi) = \frac{(-1)^n}{\sqrt{2^n n!} \sqrt{\pi}} e^{\xi^2} \frac{d^n e^{-\xi^2}}{d\xi^n}$  - полином Чебышева-Эрмита.  $n=0$ ,  $\psi_0(x) = \frac{1}{\sqrt{a} \sqrt{\pi}} \exp(-\frac{x^2}{2a^2})$ ,  $n=1$ ,  $\psi_1(x) = \frac{1}{\sqrt{2} \sqrt{a} \sqrt{\pi}} \exp(-\frac{x^2}{2a^2}) \left(\frac{x}{a}\right)$ .

2. Основные постулаты квантовой механики. Представление физических величин операторами. Собственные функции и собственные значения операторов, их связь с результатами измерений.

Состояние частицы в квантовой механике описывается заданием волновой функции  $\psi(x, y, z, t)$ , являющейся функцией пространственных координат и времени. **Второй постулат квантовой механики:** каждой физической величине соответствует определенный оператор этой физической величины. **1. Оператор координаты** – умножение на координату. **2. Оператор импульса** –  $\vec{p} = -i\hbar\nabla$ . **3. Оператор момента импульса** -  $L_x = y p_z - z p_y$ ,  $L_y = z p_x - x p_z$ ,  $L_z = x p_y - y p_x$ . Для сферических координат:  $L_x = -i\hbar(\sin\varphi(\partial/\partial\theta) + \text{ctg}\theta\cos\varphi(\partial/\partial\varphi))$ ,  $L_y = -i\hbar(\cos\varphi(\partial/\partial\theta) - \text{ctg}\theta\sin\varphi(\partial/\partial\varphi))$ ,  $L_z = -i\hbar(\partial/\partial\varphi)$ . **4. Операторы энергий.**  $E_k = \vec{p}^2/2m_0 = -\hbar^2/2m_0 \Delta$ .  $U\psi = U\psi$ . **Гамильтониан**  $H = E_k + U = -\hbar^2/2m_0 \Delta + U$ . Если при действии оператора на некоторую функцию получается та же самая функция, умноженная на число, то есть, если  $\Phi\psi = f\psi$ , то такую функцию называют **собственной функцией** оператора  $\Phi$ , а число  $f$  его **собственным значением**. **1.** Спектр непрерывный. **2.**  $-i\hbar\nabla\psi = p_x\psi \Rightarrow \psi = C\exp(ip_x x/\hbar) \Rightarrow$  спектр непрерывный. **3.**  $-i\hbar(\partial\psi/\partial\varphi) = L_z\psi \Rightarrow \psi = C\exp(iL_z\varphi/\hbar)$ . Учитывая, что  $\psi(\varphi+2\pi) = \psi(\varphi) \Rightarrow \exp(iL_z(\varphi+2\pi)/\hbar) = \exp(iL_z\varphi/\hbar) \Rightarrow \exp(iL_z 2\pi/\hbar) = 1 \Rightarrow L_z 2\pi/\hbar = 2\pi m$ , где  $m=0, \pm 1, \pm 2, \dots \Rightarrow L_z = m\hbar$ , соответствует собственным функциям  $\psi_m(\varphi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp(im\varphi)$ .  $L^2 = \hbar^2 l(l+1)$ ,  $l=0, \pm 1, \pm 2, \dots$  Задачи о нахождении спектра собственных значений оператора полной энергии  $H$  связаны с заданием конкретного вида потенциального силового поля, в котором движется частица. Формула для расчета среднего значения физической величины  $f$  в квантовом состоянии системы, описываемом волновой функцией  $\psi$ :  $\langle f \rangle = \int \Psi^*(\Phi\Psi) dV$ . Часто эту формулу называют **4-м постулатом** квантовой механики.

Билет №16

1. Корпускулярно-волновой дуализм материи. Гипотеза де Бройля. Опыты по дифракции микрочастиц.



Св-ва микрочастиц. (э-ны, протоны, фотоны, мол-лы, ядра, атомы) Всякий микрообъект – образование

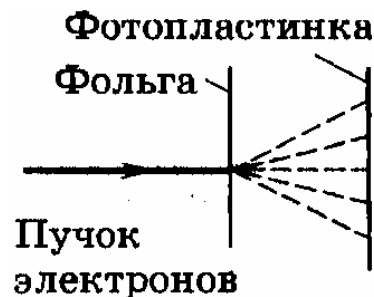
особого рода, сочет. св-ва частицы и волны, но не ведущ. себя ни как частица ни как волна. Отличие от волны – она всегда обнаруживается как неделимое целое, отличие от макрочастицы - не обладает одновременно определенными значениями координаты и импульса, следовательно понятие траектории применительно к микрочастице утрачивает смысл. Своеобразие св-в микрочастиц обнаруживается на след. эксперименте: Направим на преграду с 2 узкими щелями парал. поток моноэнергетич. э-нов. За преградой поставим фотопластинку. Вначале закроем вторую щель и проведем экспонирование в теч. вр.  $\tau$ . Почернение на фотопластинке – кривая 1, закрываем первую щель и облучаем в теч. вр  $\tau$ , получаем кривую 2. Наконец открываем обе щели и подвергнем экспонированию, получим картину в), ктр. отнюдь не эквивалентна наложению двух первых картин. Наличие дифракц. картины свидетельствует о том, что на движ. каждого э-на оказывают влияние оба отверстия. Такой вывод несовместим с понятиями о траекториях.

Гипотеза де Бройля . Де Бройль поставил в соотв. движ.

микрочастиц – нектр. волновой пр-сс  $\psi = e^{i(\vec{k}\cdot\vec{r}-\omega t)}$ ,  $\psi$  – какая-то хар-ка волны. Энергия фотона  $E = \hbar\omega$ , импульс

$p = \frac{2\pi\hbar}{\lambda}$  . По идее де Бройля движ. э-на или какой-либо др. частиц связано с волновым пр-сом, длина волны ктр.

равна  $\lambda = \frac{2\pi\hbar}{p} = \frac{2\pi\hbar}{mv}$ , а частота  $\omega = \frac{E}{\hbar}$ ,



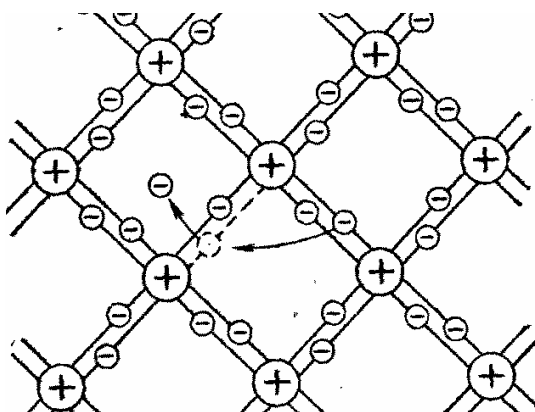
Эксп. проверка гипотезы де Бройля: Дэвисон и Джермер (1927) отражение э-нов от монокристалла никеля, в результате образуется дифракционная картина(можно прим. ф-лу Вульфа-Брэггов). Томсон получил дифр. картину при прохождении э-ного пучка через тонкую мет. фольгу и попадающего на фотопластинку.

2. Собственная проводимость полупроводников. Концентрация электронов и дырок в чистых полупроводниках. Температурная зависимость собственной проводимости полупроводников. Уровень Ферми в чистых полупроводниках.

Проводимость полупроводников.

Полупроводниками являются кристаллические вещества, у которых при 0К валентная зона полностью заполнена электронами, а ширина запрещенной зоны невелика. Характерная черта – проводимость растет с повышением температуры.

Собственная проводимость возникает в результате перехода электронов с верхних уровней валентной зоны в зону проводимости. При этом в зоне проводимости появляется несколько носителей тока – электронов, занимающих место вблизи дна зоны; одновременно в валентной зоне освобождается такое же число мест на верхних уровнях, в результате чего появляются дырки. Типичные полупроводники – кремний и германий. На рис.  $\oplus$  - атомные остатки(ктр. остаются после удаления валентных э-нов) «-» - валентные э-ны, двойные линии – ковал. связь. При достаточно высокой температуре



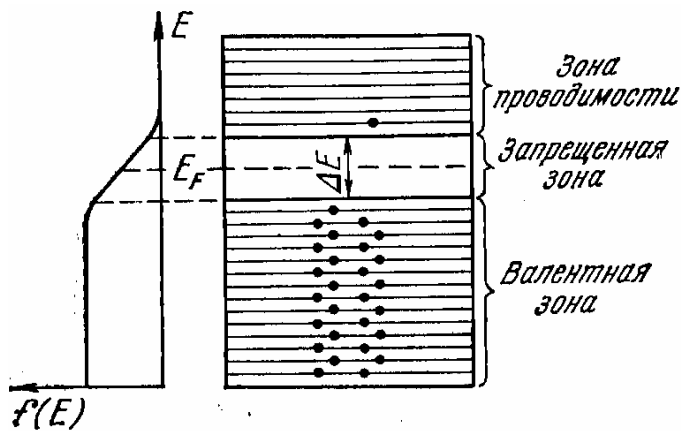
тепловое движение может разорвать отдельные пары, освободив один э-н . Покинутое место э-ном перестает быть нейтральным, в его окрестности возникает избыточный положительный заряд «+e», т.е. образуется дырка (пунктирный кружок). На это место может перескочить э-н одной из соседних пар. В результате дырка начинает также странствовать по кристаллу, как и освободившийся э-н.

При встрече своб. э-на с дыркой они рекомбинируют (соединяются). Рекомбинация приводит к одновр. исчезновению своб. э-на и дырки. В собств. полупроводнике идут

два процесса одновременно: рождение попарно свободных э-нов дырок и рекомбинация .

Вероятность первого процесса быстро растет с температурой. Вер-ть рекомбинации пропорциональна как числу дырок, так и числу э-нов. Следов, каждой температуре соотв. опр. равновесная концентрация э-нов и дырок, ктр. изменяется пропорционально  $T$  (1)

Концентрация электронов и дырок в чистых полупроводниках.



Распределение электронов по уровням валентной зоны и зоны проводимости описывается функцией Ферми-Дирака. (на рис.) Уровни зоны проводимости лежат на хвосте кривой распределения, поэтому вероятность их заполнения электронами  $f(E) \sim \exp(-\Delta E / 2kT)$  (1).

В собственном полупроводнике одинаковые концентрации э-нов и дырок будут равны

$$n = p = A^{1/2} \exp(-\Delta E / 2kT), \text{ где } A - \text{коэф. пропорциональности.}$$

Уровень Ферми в чистых полупроводниках.

$$E_F = \frac{1}{2} \Delta E + \frac{3}{4} kT \ln \frac{m_D^*}{m_E^*}, \text{ где } \Delta E - \text{ширина запрещенной зоны, а } m_D^* \text{ и } m_E^* - \text{эффективные}$$

массы электрона и дырки. Обычно второе слагаемое пренебрежимо мало, поэтому можно сказать, что уровень Ферми для чистых полупроводников лежит посередине запрещенной зоны.

Температурная зависимость проводимости беспримесных полупроводников.

Электропроводность собственных полупроводников:  $\sigma = \sigma_0 \exp(-\Delta E / 2kT)$ , где  $\Delta E$  - ширина запрещенной зоны,  $\sigma_0$  - величина, изменяющаяся с температурой гораздо медленнее, чем экспонента, поэтому ее в первом приближении можно считать константой.

### Билет №17

1. Уравнение Шредингера для атома водорода. Квантовые числа, их физический смысл.

Рассмотрим систему сост. из э-на, ктр. движется в кулоновском поле ядра с зарядом  $Ze$ . Такую сист. называют водородоподобной, при  $Z=1$  это атом водорода,  $Z>1$

$$U(r) = -\frac{Ze^2}{r}$$

водородоподобный ион. Потенц. энергия э-на

( $r$  – расстояние от э-на до ядра). Следовательно ур-е Шредингера имеет вид

$$\nabla^2 \psi + \frac{2m_e}{\hbar^2} \left( E + \frac{Ze^2}{r} \right) \psi = 0$$

(1), Решая ур-е (К.О.Н.) получаем что ур-е имеет решение

только при 1) Любых положительных энергиях  $E$  2) При дискретных отриц. зн-ях

энергии  $E_n = -\frac{m_e e^4 Z^2}{2\hbar^2 n^2}$ . Собственные ф-ции ур-я (1) содержат три целочисленных

параметра –  $n, l, m$   $\psi = \psi_{nlm}(r, \vartheta, \varphi)$ . Параметр  $n$  – главное квантовое число (совпадает с номером уровня энергии)

параметры  $l$  и  $m$  представляют собой азимутальное и магнитное квантовые числа,  
 опред. из ф-л:  $M = \hbar\sqrt{l(l+1)}$ ,  $l = 0, 1, 2, \dots$  - модуль момента импульса;  $M_z = m\hbar$ ,  
 $m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, \pm l$  - проекция момента импульса.

Решения удовлетворяющие стандартным условиям, получаются лишь при значениях  $l$ ,  
 не превышающих  $n-1$ , следов. при данном  $n$  квантовое число  $l$  может принимать  $n$  зн-ий  
 $l = 0, 1, \dots, n-1$ , в свою очередь, при данном  $l$  кв. число  $m$  может принимать  $2l+1$   
 различных зн-ий. Энергия э-на зависит только от кв. числа  $n$ , отсюда следует, что  
 каждому собств. зн-ю  $E_n$  (кроме  $n=1$ ) соотв. несколько собств. ф-ций  $\psi_{nlm}$ ,  
 отличающихся зн-ями кв. чисел  $l$  и  $m$ .

Т.е. э-н может иметь одно и то же зн-е энергии, находясь в неск. различных состояниях.  
 Состояния с одинаковой энергией назыв. вырожденными, а число различных сост. с  
 опред. зн-ем энергии - кратностью вырождения.

$$\sum_{l=0}^{n-1} (2l+1) = 1 + 3 + 5 + \dots + (2n-1) = n^2$$

- Кратность вырождения  $n$ -го энерг. ур-ня

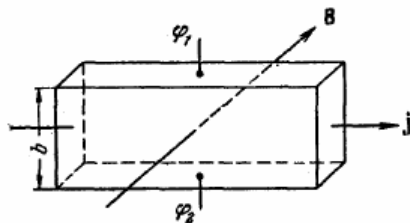
водородоподобных сист. =  $n^2$ .

Обозначения состояний  $l = 0, 1, 2, 3, 4, \dots \Rightarrow s, p, d, f, g, \dots$  Т.О. э-н в сост. с  $n=3$  и  $l=1$   
 обозн-ся  $3p$  и т.д.

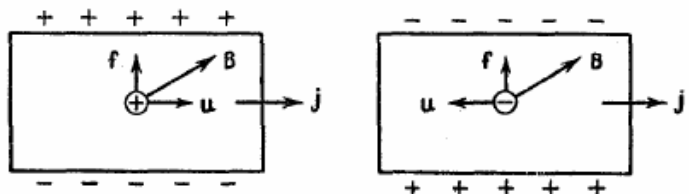
Для азимутального числа имеется правило отбора  $\Delta l = \pm 1$  Возможны лишь те переходы  
 внеш. э-на при ктр. квантовое число изм-ся на единицу, т.е. между  $s$  и  $p$  сост,  $p$  и  $d$ .

## 2. Эффект Холла в полупроводниках, его практическое применение.

Эффект Холла. Если металлическую пластинку, вдоль которой течет постоянный  
 электрический ток, поместить в перпендикулярное к ней магнитное поле, то между  
 параллельными току и полю гранями возникает разность потенциалов  $U_H = \varphi_1 - \varphi_2$ .  
 Величина ее определяется выражением  $U_H = RbjB$ , где  $b$  – ширина пластинки,  $j$  –  
 плотность тока,  $B$  – магнитная индукция поля,  $R$  – разный для разных металлов  
 коэффициент пропорциональности, получившей название постоянной Холла.



В полупроводниках. По знаку эффекта Холла в  
 полупроводниках можно судить о принадлежности  
 полупроводника к  $n$  или  $p$  типу.



На рисунке сопоставлен эффект Холла для образцов с положительными и  
 отрицательными носителями. Направление силы Лоренца изменяется на  
 противоположное как при изменении направления движения заряда, так и при  
 изменении его знака. Следовательно, при одинаковом направлении тока сила Лоренца,  
 действующая на положительные и отрицательные носители, имеет одинаковое  
 направление. Поэтому в случае положительных носителей потенциал верхней (на  
 рисунке) грани выше, чем нижней, а в случае отрицательных носителей – ниже. Таким  
 образом определив знак холловской разности потенциалов, можно установить знак  
 носителей тока.

## Билет №18

1. Основные постулаты квантовой механики. Представление физических величин  
 операторами. Вычисление средних значений физических величин.

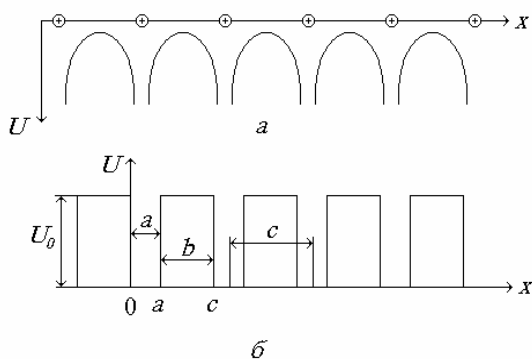
Состояние частицы в квантовой механике описывается заданием волновой функции  $\psi(x,y,z,t)$ , являющейся функцией пространственных координат и времени. **Второй постулат квантовой механики:** каждой физической величине соответствует определенный оператор этой физической величины. **1. Оператор координаты** – умножение на координату. **2. Оператор импульса** –  $\hat{p} = -i\hbar\nabla$ . **3. Оператор момента импульса** -  $L_x = yz - zp_y$ ,  $L_y = zx - xp_z$ ,  $L_z = xy - yp_x$ . Для сферических координат:  $L_x = -i\hbar(\sin\varphi(\partial/\partial\theta) + \text{ctg}\theta\cos\varphi(\partial/\partial\varphi))$ ,  $L_y = -i\hbar(\cos\varphi(\partial/\partial\theta) - \text{ctg}\theta\sin\varphi(\partial/\partial\varphi))$ ,  $L_z = -i\hbar(\partial/\partial\varphi)$ . **4. Операторы энергий.**  $E_k = \mathbf{p}^2/2m_0 = -\hbar^2/2m_0*\Delta$ .  $U\psi = U\psi$ . **Гамильтониан**  $H = E_k + U = -\hbar^2/2m_0*\Delta + U$ . Если при действии оператора на некоторую функцию получается та же самая функция, умноженная на число, то есть, если  $\Phi\psi = f\psi$ , то такую функцию называют **собственной функцией** оператора  $\Phi$ , а число  $f$  его **собственным значением**.

**1.** Спектр непрерывный. **2.**  $-i\hbar\nabla\psi = p_x\psi \Rightarrow \psi = C\exp(ip_x x/\hbar) \Rightarrow$  спектр непрерывный. **3.**  $-i\hbar(\partial\psi/\partial\varphi) = L_z\psi \Rightarrow \psi = C\exp(iL_z\varphi/\hbar)$ . Учитывая, что  $\psi(\varphi+2\pi) = \psi(\varphi) \Rightarrow \exp(iL_z(\varphi+2\pi)/\hbar) = \exp(iL_z\varphi/\hbar) \Rightarrow \exp(iL_z2\pi/\hbar) = 1 \Rightarrow L_z2\pi/\hbar = 2\pi m$ , где  $m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \Rightarrow L_z = m\hbar$ , соответствует собственным функциям  $\psi_m(\varphi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp(im\varphi)$ .  $L^2 = \hbar^2 l(l+1)$ ,  $l = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ . Задачи о нахождении спектра собственных значений оператора полной энергии  $H$  связаны с заданием конкретного вида потенциального силового поля, в котором движется частица. Формула для расчета среднего значения физической величины  $f$  в квантовом состоянии системы, описываемом волновой функцией  $\psi$ :

$\langle f \rangle = \int \psi^* (f\psi) dV$ . Часто эту формулу называют **4-м постулатом** квантовой механики.

2. Электроны в периодическом поле кристалла. Образование энергетических зон. Энергетический спектр электронов в модели Кронига-Пенни.

Валентные электроны в кристалле движутся не вполне свободно – на них действует периодическое поле решетки, что приводит к тому, что спектр возможных значений энергии валентных электронов распадается на ряд чередующихся **разрешенных и запрещенных зон**. Зонная структура энергетических уровней получается непосредственно из решения уравнения Шредингера для электрона, движущегося в периодическом силовом поле, создаваемом решеткой кристалла. Учитывая поле решетки имеем:  $-\hbar^2/2m\Delta\psi + U\psi = E\psi$ . где  $U$  – функция, обладающая свойствами  $U(x+a,y,z) = U(x,y+b,z) = U(x,y,z+c) = U(x,y,z)$ , где  $a, b, c$  – периоды решетки вдоль соотв. осей. Решения:  $\psi_k = u_k(\mathbf{r})\exp(i\mathbf{k}\mathbf{r})$ , где  $u_k(\mathbf{r})$  – функция, имеющая периодичность



потенциала т.е. периодичность кристаллической решетки. (Реш. ф-ии  $\psi_k$  называются функциями Блоха). **На рис.:** Изменение потенциальной энергии электрона:  $a$  - в реальном кристалле;  $b$  - в модели Кронига - Пенни. В модели Кронига-Пенни ограничиваются рассмотрением одномерной задачи, в которой периодический потенциал заменяется цепочкой прямоугольных потенциальных ям. Ширина каждой ямы  $a$ , они отделены друг от друга

прямоугольными потенциальными барьерами высотой  $U_0$  и шириной  $b$ . Период повторения ям  $c = a + b$ .

Билет №19

1. Орбитальный, спиновой и полный механический и магнитный моменты электрона.

$M_l = \hbar\sqrt{l(l+1)}$   $l = 0, 1, 2, \dots$  - орбитальный момент (пр-ло отбора  $\Delta l = \pm 1$ );  $M_{l_z} = m_l \hbar$ ,  $m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, \pm l$

$M_s = \hbar\sqrt{s(s+1)}$ ,  $s = 1/2$  - спиновой момент,  $M_{s_z} = m_s \hbar$ ,  $m_s = \pm s = \pm 1/2$ ;

Полный мех. момент  $M_j = \hbar\sqrt{j(j+1)}$ ,  $j = l + s, |l - s|$ , Пр-я на ось Z  $M_{j_z} = \hbar m_j$ ,  $m_j = j, j-1, \dots, -j$

Для квантового числа полного момента импульса  $J$  суц. пр-ло отбора  $\Delta J = 0, \pm 1$ .

Спиновый магнитный момент  $\mu_s = -2\mu_B\sqrt{S(S+1)}$ ,  $\mu_{s_z} = -2\mu_B m_s$ ,  $m_s = S, S-1, \dots, -S$ , При  $S=1/2$   $m_s = +1/2$  и  $-1/2$  (Для электрона). Полный

магнитный момент атома  $\mu = -\mu_B g\sqrt{J(J+1)}$ ,  $\mu_z = -\mu_B g m_J$

$m_J = J, J-1, \dots, -J$  где  $g = \frac{3}{2} + \frac{S(S+1) - L(L+1)}{2J(J+1)}$

2. Стационарные состояния. Волновая функция частицы в стационарном состоянии. Уравнение Шредингера для стационарных состояний.

Уравнение Шредингера.  $\psi = c \cdot e^{i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)}$  1. Уравнение должно быть линейным и однородным, чтобы вып-ся принцип дифракции и интерф. 2) Чтобы вып-ся принцип суперпозиции должно содержать мировые константы 3) Должно решаться для любых квантово-мех. задач.

$$\frac{\partial \psi}{\partial x} = ik_x \psi, \quad \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} = -k_x^2 \psi, \quad \Delta \psi = \nabla^2 \psi = -k^2 \psi = -(p/\hbar)^2 \psi, \quad \frac{\partial \psi}{\partial t} = -i\omega \psi = -i \frac{\varepsilon}{\hbar} \psi,$$

$$\varepsilon = p^2 / 2m,$$

$$i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} = \varepsilon \psi = \frac{p^2}{2m} \psi = -\frac{\hbar^2}{2m} \Delta \psi, \quad -\frac{\hbar^2}{2m} \Delta \psi = i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} \quad \text{для своб. микрочастицы, Мы будем}$$

$$\frac{p^2}{2m} = E - U$$

рассм. потенциальные поля, энергия в ктр. хар-ся  $\frac{p^2}{2m} = E - U$ , тогда

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \Delta \psi + U\psi = i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} \quad \text{- Ур-е ШРЕДИНГЕРА. Если силовое поле стационарно, то ф-я}$$

$U$  не зависит явно от времени и имеет смысл потенц. энергии, тогда  $\psi(\vec{r}, t) = \psi(\vec{r})e^{-i\omega t}$ , подставляя в Ур-е Шредингера и сокращая на  $e^{-i\omega t}$ , получаем Ур-е для стационарных

$$\text{состояний} \quad -\frac{\hbar^2}{2m} \Delta \psi(\vec{r}) + U\psi(\vec{r}) = E\psi(\vec{r}) \quad \text{. Статистич. смысл пси ф-ции. } dP = |\psi|^2 dV,$$

квадрат модуля пси-ф-ии определяет вероятность  $dP$  того, что частица будет обнаружена в пределах объема  $dV$ , условия ктр. должна удовлетворять пси-ф-я: непрерывная, конечная, однозначная, производные непрерывны. Вычтем из ур-я Ш.

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2 \psi(x, t)}{\partial x^2} + U(x, t)\psi(x, t) = i\hbar \frac{\partial \psi(x, t)}{\partial t} \quad \text{комплексно сопряженное ему ур-е}$$

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2 \bar{\psi}}{\partial x^2} + U\bar{\psi} = -i\hbar \frac{\partial \bar{\psi}}{\partial t}$$

$$\text{получим} \quad -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial}{\partial x} \left( \bar{\psi} \frac{\partial \psi}{\partial x} - \psi \frac{\partial \bar{\psi}}{\partial x} \right) = i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \left( \bar{\psi} \frac{\partial \psi}{\partial t} + \psi \frac{\partial \bar{\psi}}{\partial t} \right) \quad \text{или}$$

$$\frac{\partial}{\partial t} |\psi|^2 + \frac{\partial}{\partial x} \left( -\frac{i\hbar}{2m} \left( \bar{\psi} \frac{\partial \psi}{\partial x} - \psi \frac{\partial \bar{\psi}}{\partial x} \right) \right) = 0$$



откуда 
$$\frac{\partial}{\partial t} |\psi|^2 + \text{div} \left( -\frac{i\hbar}{2m} (\bar{\psi} \cdot \nabla \psi - \psi \cdot \nabla \bar{\psi}) \right) = 0$$
 где выражение в скобках и есть вектор плотности потока вероятности, по аналогии с уравнением непрерывности  $\frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div} \vec{j} = 0$ .

Принцип суперпозиции. Пусть в состоянии с волновой функцией  $\psi_1(\vec{r})$  некоторое измерение приводит с достоверностью к определенному результату 1, а в состоянии с волновой функцией  $\psi_2(\vec{r})$  - к результату 2. Тогда всякая линейная комбинация  $\psi_1$  и  $\psi_2$ , т.е. всякая волновая функция вида  $c_1\psi_1 + c_2\psi_2$ , где  $c_1$  и  $c_2$  - постоянные, дает состояние, в котором то же измерение дает либо результат 1, либо результат 2. Вероятности проявления этих результатов равны  $c_1^2$  и  $c_2^2$  соответственно. Если  $\psi_1(\vec{r}, t)$  и  $\psi_2(\vec{r}, t)$  являются решениями уравнения Шредингера, то и любая их лин. комб. 
$$\psi = \sum_n c_n \psi_n$$
 также является решением уравнения Шредингера.

### Билет №20

#### 1. Собственные механический и магнитный моменты электрона. Опыт Штерна и Герлаха.

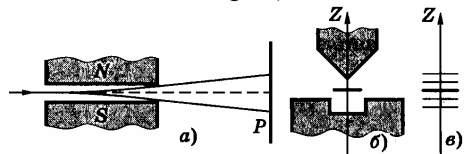
Электрон обладает собственным моментом импульса  $M_s$ , не связанным с движ. э-на в пр-ве. Этот собственный момент - спин. Спин характеризует внутр. св-во э-на подобно

массе и заряду. 
$$M_s = \hbar \sqrt{s(s+1)} = \frac{1}{2} \hbar \sqrt{3}, \quad s = 1/2$$
 где  $s$  - спиновое квантовое число,

$M_{sz} = m_s \hbar$ ,  $m_s = \pm s = \pm 1/2$ . Электрон наряду с собств. мех. моментом облад. собств.

магнитным моментом  $\mu_s$ . Причем 
$$\frac{\mu_s}{M_s} = -\frac{e}{m_e c},$$
 тогда 
$$\mu_s = -2\mu_B \sqrt{s(s+1)} = -\mu_B \sqrt{3}$$

$\mu_B$  - магнетон Бора (единица магнитного момента) 
$$\mu_{sz} = -\frac{e}{m_e c} M_{sz} = \mp \mu_B$$



Опыт Штерна и Герлаха. Пучок атомов пропускается через сильно неоднородное поперечное магнитное поле а). Неоднородность достигалась с помощью спец. формы полюсных наконечников б). Далее пучок атомов попадал на

фотопластинку Р и оставлял на ней след. Если атомы обладают магнитным моментом, то на них будет действовать сила, пр-я ктр.  $F_z = \mu_z \cdot \partial B_z / \partial z$   $\mu_z$  - пр-я магнитного момента атома. При малых  $\mu_z$

необх. обеспечить дост. большую неоднородность поля, т.е.  $\partial B_z / \partial z$ . в отсутствие магн. поля след пучка на Р имел вид полоски  $z=0$ . При включении магнитного поля

наблюдалось расщепление пучка в), что являлось следствием квантования пр-ии  $\mu_z$ . Обнаружилось также, что для разных атомов число компонент, на ктр. расщеплялся пучок, было то четным, то нечетным. Нечетно - у атомов облад. только орбитальным мех. моментом  $M_L$ , магн. поле снимает вырождение по  $L$  и число компонент (значений  $m_L$ ) будет равно  $2L+1$  т.е. нечетным. Если же момент = сумме орбитального и спинового, т.е. определяется кв. числом  $J$ , то число компонент будет равно  $2J+1$ , и в зав-ти от того, полуцелым или целым будет  $J$ , число компонент будет четным или нечетным.

## 2. Контактные явления в полупроводниках. *p-n* переход, его вольт-амперная характеристика.

Контактные явления в полупроводниках.

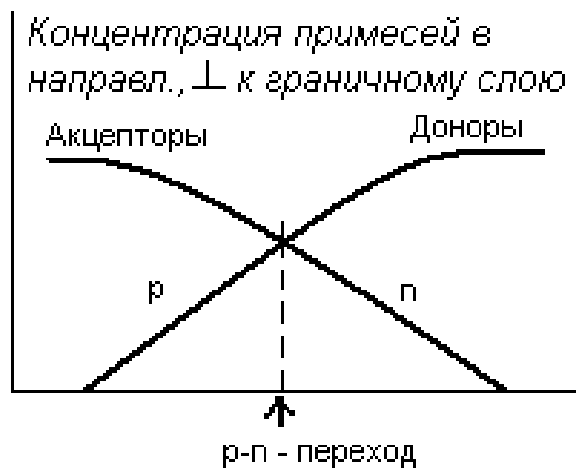
Если привести два разных полупроводника в соприкосновение, между ними возникает разность потенциалов, которая называется *контактной*. В результате в окружающем пространстве возникает электрическое поле. Контактная разность потенциалов обусловлена тем, что при соприкосновении поверхностей часть электронов переходит из одного полупроводника в другой.

Внешняя контактная разность потенциалов:

$$U_{12} = \frac{e\varphi_2 - e\varphi_1}{e} = \varphi_2 - \varphi_1;$$

Внутренняя разность потенциалов:

$$U'_{12} = \frac{\varepsilon_{F1} - \varepsilon_{F2}}{e}.$$



*p-n* переход, его вольтамперная характеристика.

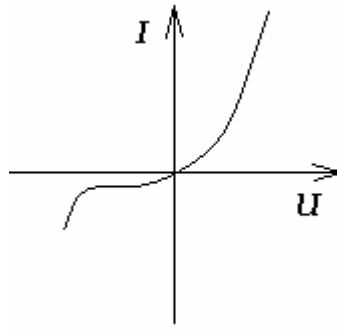
*p-n* переход – тонкий слой на границе между двумя областями одного и того же кристалла, отличающимися типом примесной проводимости.

В *p*-области основные носители тока – дырки (акцепторы становятся отрицательными ионами). В *n*-области – электроны, отданные донорами в зону проводимости.

Диффундируя во встречных направлениях через пограничный слой, дырки и электроны рекомбинируют друг с другом. → меньше носителей и большое сопротивление *p-n*-перехода. Одновременно на границе между областями возникает двойной электрический слой, образованный отрицательными ионами акцепторной примеси, заряд которых не компенсируется дырками, и положительными ионами донорной примеси, заряд которых теперь не компенсируется электронами. Электрическое поле в этом слое направлено так, что противодействует дальнейшему переходу через слой основных носителей. Равновесие достигается при такой высоте потенциального барьера, при которой уровни Ферми обеих областей располагаются на одинаковой высоте.



В направлении от *p*-области к *n*-области *p-n*-переход пропускает ток, сила которого быстро нарастает при увеличении приложенного напряжения (прямое направление). В обратном направлении *p-n*-переход обладает гораздо большим сопротивлением, чем в прямом. Поле, возникающее в кристалле при наложении обратного напряжения, «оттягивает» основные носители от границы между областями, что приводит к возрастанию ширины переходного слоя, обедненного носителями.



ВАХ р-n-перехода

Билет №21

1. Статистика Бозе-Эйнштейна. Функция распределения Бозе-Эйнштейна. Свойства идеального газа бозе-частиц.

Функция распределения имеет вид  $\langle n_i \rangle = \frac{1}{e^{(E_i - \mu)/kT} - 1}$  где  $\langle n_i \rangle$  - среднее число частиц, находящихся в состоянии с номером  $i$ ,  $E_i$  - энергия частицы в этом состоянии,  $\mu$  - хим. потенциал, определяемый из условия, что сумма всех  $\langle n_i \rangle$  равна полному числу  $N$  частиц в системе  $\sum \langle n_i \rangle = N$ , причем  $\mu \leq 0$ . Для систем с переменным числом частиц  $\mu = 0$  (сист. фотонов и фононов)

Частицы подчиняющиеся этому распределению – бозоны (частицы обладающие нулевым или целым спином). Для статистики Бозе-Эйнштейна не выполняется принцип Паули; вероятность  $P$  возникновения бозона в состоянии, в ктр. уже имеется  $n$  частиц, пропорциональна  $n$ . Т.о. бозоны «любят» накапливаться в одном состоянии – они являются «коллективистами».

Сверхтекучесть гелия II. ---?

2. Условия возможности одновременного измерения разных физических величин в квантовой механике. Соотношение неопределенностей Гейзенберга.

Операторы энер В квантовой механике физ. вел. хар-ся не своим численным значением, а линейным эрмитовым оператором, которым эта величина представляется. Линейность операторов необходима для выполнения принципа суперпозиции, а эрмитовость – для того, чтобы зн-е физ. вел., получаемое в результате измерения, было действительным. Оператор – правило, посредством ктр. одной ф-ии ( $f$ ) сопоставляется другая ф-я ( $\varphi$ ), т.е.  $f = \hat{Q}\varphi$ ,  $\hat{Q}$  - симв. обозн-е оператора, под символом оператора скрывается совокупность действий с помощью ктр. исх. ф-я  $\varphi$  превращается в др. ф-ю  $f$ . Каждой физ. вел. (координате, импульсу, моменту импульса и т.д.) ставится в соотв. свой оператор (оп-р коорд., оп-р импульса и т.д.) Одним из осн. постулатов квантовой теории является утверждение, что единственными возможными результатами измерения физ. вел.  $f$ , ктр. соответствует оператор  $\hat{F}$ , являются собственные значения этого оператора, т.е. собственные значения  $f_n$  ур-я  $\hat{F}\psi_n = f_n\psi_n$  здесь  $\psi_n = \psi_n(x, y, z)$  - собств. ф-ии (решения этого ур-я)

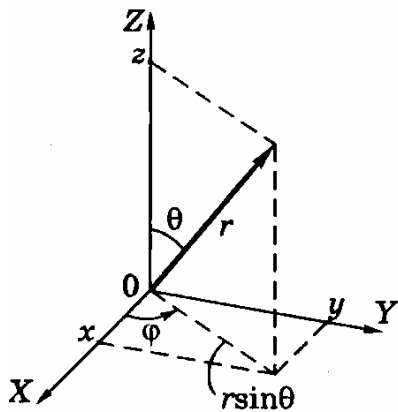
Среднее значение любой физ. вел.  $Q$  нах-ся по формуле  $\langle Q \rangle = \int \psi^* \hat{Q} \psi dx$  где  $\psi^*$  - комплексно-сопряженная ф-ция.

Операторы координаты  $\hat{x} = x$ ,  $\hat{y} = y$ ,  $\hat{z} = z$ , Операторы проекции импульса

$$\hat{p}_x = \frac{\hbar}{i} \frac{\partial}{\partial x}, \hat{p}_y = \frac{\hbar}{i} \frac{\partial}{\partial y}, \hat{p}_z = \frac{\hbar}{i} \frac{\partial}{\partial z}$$

$$\hat{p}^2 = -\hbar^2 \Delta, \hat{p}_x^2 = \hbar^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} \text{ тогда } \hat{p}_x = \pm \hbar \frac{\partial}{\partial x}, \hat{p}_x \psi = p_x \psi, \pm i \hbar \frac{\partial}{\partial x} \psi = p_x \psi, \frac{d\psi}{\psi} = \mp i \frac{p_x}{\hbar} dx,$$

$$\ln \psi = \ln C(t) \mp i \frac{p_x}{\hbar} x, \psi = C(t) e^{\mp i \frac{p_x}{\hbar} x} = A e^{\mp i k x - i \omega t} \text{ - волна Де Бройля, где } \frac{p_x}{\hbar} = k.$$



Операторы проекций моменты импульса  $\hat{M} = [\hat{r}, \hat{p}]$ ,  
 $\hat{M}_z = \hat{x}\hat{p}_y - \hat{y}\hat{p}_x = -i\hbar \left( x \frac{\partial}{\partial y} - y \frac{\partial}{\partial x} \right)$   $\hat{E}_k = \frac{\hat{p}^2}{2m_0} = -\frac{\hbar^2}{2m_0} \Delta$

Оператор потенциальной энергии  $\hat{U} = U(x, y, z)$ ,

$\hat{H} = \hat{E}_k + \hat{U} = -\frac{\hbar^2}{2m_0} \Delta + U(x, y, z)$  - Гамильтониан

(Оператор полной энергии)

Необх. и дост. условием возможности измерения двух физ. вел. а и б является коммутативность соотв. им

операторов  $\hat{A}$  и  $\hat{B}$ , т.е. выполнение равенства  $[\hat{A}, \hat{B}] = \hat{A}\hat{B} - \hat{B}\hat{A} = 0$ . Если же

коммутатор  $[\hat{A}, \hat{B}]$  не равен нулю, то соотв. им две физ. вел. не могут быть измерены одновременно и точно. Для таких физ. вел. справедливы соотношения

неопределенностей вида  $\Delta a \cdot \Delta b > 0$ , утверждающие что обе неопределенности  $\Delta a$  и  $\Delta b$

не могут одновременно стремиться к нулю. Принцип неопределенности Гейзенберга. Своеобразие св-в микрочастиц – не для всех переменных получаются при измерениях опред. значения. Микрочастица не может иметь одновр. точных зн-ий

коорд. и импульса. Неопределенности зн-ий  $x$  и  $p_x$  удовл. соотн.  $\Delta x \cdot \Delta p_x \geq \hbar$

Произведение неопред. зн-ий двух сопряженных переменных не может быть по порядку величины быть меньше пост. планка. Для энергии имеем  $\Delta E \cdot \Delta t \geq \hbar$  (Для измер. энергии с погрешностью  $\Delta E$  необх. время не меньше чем  $\Delta t \approx \hbar / \Delta E$ ).

## Билет №22

### 1. Статистика Ферми-Дирака. Функция распределения Ферми-Дирака. Вырожденный электронный газ. Энергия Ферми.

При абсолютном нуле в каждом из состояний, энергия которых не превышает  $E_F(0)$ , находится один электрон, в состояниях с  $E > E_F(0)$  электроны отсутствуют. Находим ф-цию распределения при температуре, отличной от абсолютного нуля. Рассматриваются неупругие столкновения равновесного электронного газа с атомом примеси, внедренным в кристаллич. решетку металла. При нахождении получается выр-е

$f(E) = \frac{1}{\exp\{(E - \mu) / kT\} + 1}$  Это функция (Ферми-Дирака) распределения эл-онов по состояниям с различной энергией. Параметр  $\mu$  называется химическим потенциалом. Имеющий размерность энергии, его часто

обозначают  $E_F$  и называют уровнем Ферми или энергией Ферми. Смысл ф-ции распредел. Величина

$f(E_i)$  представляет собой среднее число эл-онов  $\langle n_i \rangle$  находящихся в состоянии с энергией

$E_i$ ,  $\langle n_i \rangle = \frac{1}{\exp\{(E_i - \mu) / kT\} + 1}$ . Это выр-е лежит в основе статистики Ферми-Дирака. Частицы подчиняющиеся

этой статистике называют фермионами. К их числу относят все частицы с полуцелым спином (е, р, н) Фермионы никогда не занимают состояния, в котором уже находится одна частица. При абсолютном нуле

$f(E) = 1$  если  $E < E_F$  и  $f(E) = 0$  если  $E > E_F$ . Тогда при 0К уровень ферми совпадает с верхним заполненным

эл-онами уровнем  $E_F(0)$  Независимо от температуры при  $E = E_F$  ф-я  $f(E)$  равна 1/2 Следовательно уровень Ферми совпадает с тем энергоуровнем, вероятность заполнения которого равна половине. Поведение электронного газа зависит от соотношения между температурой кристалла и температурой Ферми, равной  $E_F / k$ . Есть 2

предельных случая: 1)  $kT \ll E_F$  - газ вырожденный 2)  $kT \gg E_F$  - газ невырожденный

### 2. Контактные явления в полупроводниках. p-n переход, его вольт-амперная характеристика.

Контактные явления в полупроводниках.

Если привести два разных полупроводника в соприкосновение, между ними возникает разность потенциалов, которая называется контактной. В результате в окружающем пространстве возникает электрическое поле. Контактная разность потенциалов

обусловлена тем, что при соприкосновении поверхностей часть электронов переходит из одного полупроводника в другой.

Внешняя контактная разность потенциалов:  $U_{12} = \frac{e\varphi_2 - e\varphi_1}{e} = \varphi_2 - \varphi_1$ ;

Внутренняя разность потенциалов:  $U'_{12} = \frac{\varepsilon_{F1} - \varepsilon_{F2}}{e}$ .

p-n переход, его вольтамперная характеристика.



p-n переход – тонкий слой на границе между двумя областями одного и того же кристалла, отличающимися типом примесной проводимости.

В p-области основные носители тока – дырки (акцепторы становятся отрицательными ионами). В n-области – электроны, отданные донорами в зону проводимости.

Диффундируя во встречных направлениях через пограничный слой, дырки и электроны рекомбинируют друг с другом. → меньше носителей и большое сопротивление p-n-перехода.

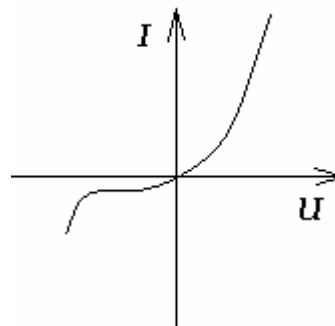
Одновременно на границе между областями возникает двойной электрический слой, образованный отрицательными ионами акцепторной примеси, заряд которых не компенсируется дырками, и положительными ионами донорной примеси, заряд которых теперь не компенсируется электронами.



Электрическое поле в этом слое направлено так, что противодействует дальнейшему переходу через слой основных носителей. Равновесие достигается при такой высоте потенциального барьера, при которой уровни Ферми обеих областей располагаются на одинаковой высоте.

В направлении от p-области к n-области p-n-переход пропускает ток, сила которого быстро нарастает при увеличении приложенного напряжения (прямое направление).

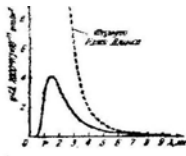
В обратном направлении p-n-переход обладает гораздо большим сопротивлением, чем в прямом. Поле, возникающее в кристалле при наложении обратного напряжения, «оттягивает» основные носители от границы между областями, что приводит к возрастанию ширины переходного слоя, обедненного носителями.



ВАХ p-n-перехода

Билет №23

1. Дискретный характер испускания и поглощения излучения веществом. Формула Планка для равновесного теплового излучения.



$$u(\omega, T) = \frac{\omega^2}{\pi^2 c^3} kT$$

**Ф-ла Рэлея-Джинса.** Гипотеза Планка. Э.М. излучение испускается и

поглощается в виде отдельных порций энергии (квантов)  $\varepsilon_0 = \hbar\omega$ .

$$u(\omega, T) = \frac{\hbar\omega^3}{\pi^2 c^3} \frac{1}{\exp(\hbar\omega / kT) - 1}$$

**Ф-ла Планка.**

$\hbar = 1,055 \cdot 10^{-34} \text{ Дж} \cdot \text{с}$  - постоянная Планка.

С помощью замены  $\hbar\omega / kT = x$ ;  $R^* = \int_0^\infty f(\omega, T) d\omega = \frac{\hbar}{4\pi^2 c^2} \left(\frac{kT}{\hbar}\right)^4 \int_0^\infty \frac{x^3 dx}{e^x - 1}$  причем  $\int_0^\infty \frac{x^3 dx}{e^x - 1} = \frac{\pi^4}{15}$  откуда

после преобразований  $R^* = \sigma T^4$ ,  $\sigma = \pi^2 k^4 / 60 c^2 \hbar^3 = 5,7 \cdot 10^{-8} \text{ Вт}/(\text{м}^2 \cdot \text{К}^4)$ .

2. Примесная проводимость полупроводников. Концентрация основных и неосновных носителей в полупроводниках *n*-типа. Уровень Ферми примесного полупроводника *n*-типа. Температурная зависимость проводимости примесного полупроводника *n*-типа.

*Примесная проводимость* полупроводников возникает, если некоторые атомы данного полупроводника заменить в узлах кристаллической решетки атомами, валентность которых отличается на единицу от валентности основных атомов.

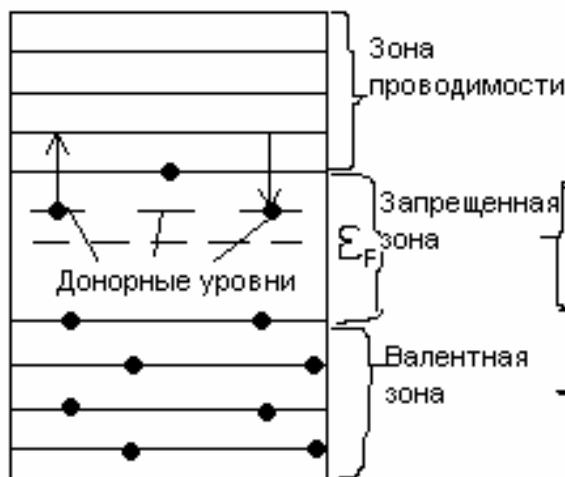
Концентрация основных и неосновных носителей в полупроводниках *n*-типа.

В полупроводнике с примесью, валентность которой на единицу больше валентности

основных атомов, имеется только один вид носителей тока – электроны. Такой полупроводник обладает электронной проводимостью и является полупроводником *n*-типа. Атомы примеси, поставляющие электроны проводимости, называют *донорами*.

когда расстояние донорных уровней от дна зоны проводимости гораздо меньше запрещенной зоны, энергия теплового движения даже при обычных температурах оказывается достаточной для того, чтобы перевести электрон с донорного уровня в зону проводимости.

Уровень Ферми примесного



полупроводника *n*-типа.

Уровень Ферми располагается в верхней половине запрещенной зоны.

При повышении температуры уровень Ферми ( $E_F$ ) в полупроводниках обоих типов смещается к середине запрещенной зоны.

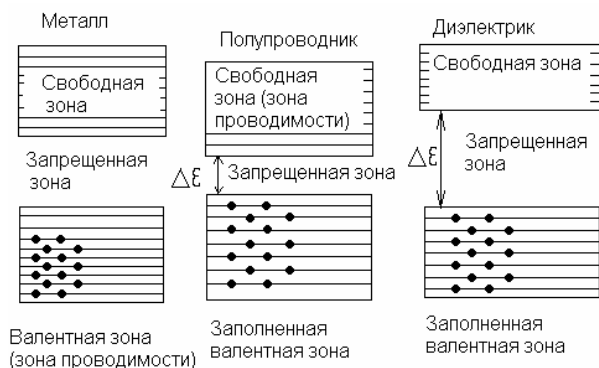
Температурная зависимость проводимости примесного полупроводника *n*-типа.

При повышении температуры концентрация примесных носителей тока быстро достигает вершины. Это значит, что практически освобождаются все *донорные* или заполняются электронами все акцепторные уровни. По мере роста температуры все больше сказывается собственная проводимость полупроводника, обусловленная переходом электронов из валентной зоны в зону проводимости. → при высоких температурах проводимость полупроводника складывается из примесной и собственной проводимостей. При низких температурах преобладает примесная, а при высоких – собственная проводимость.

Билет №24

1. Зонная теория твердых тел. Структура зон в металлах, полупроводниках и диэлектриках.

На валентные электроны в кристалле действует периодическое поле решетки, что приводит к тому, что спектр возможных значений энергии валентных электронов распадается на ряд чередующихся разрешенных и запрещенных зон. В пределах **разрешенных зон** энергия изменяется квазинепрерывно. Значения энергии, принадлежащие **запрещенным зонам**, не могут реализоваться.



**Валентной зоной** (в случае металла ее также называют *зоной проводимости*) называют разрешенную зону, возникшую из того уровня, на котором находятся валентные электроны в основном состоянии атома. В случае Ме э-ны заполняют валентную зону неполностью, поэтому достаточно сообщить э-нам совсем небольшую энергию ( $10^{-22}$  эВ), чтобы перевести их на более высокие уровни. В случаях п/пр-ка и диэлектрика уровни вал. зоны полностью заняты

электронами. Для того чтобы увеличить энергию э-на необх. сообщить ему кол-во энергии  $\geq$ , чем ширина запрещ. зоны. Если эта ширина невелика (неск. десятых эВ), то энергии теплового движения оказывается достаточно Свободная зона окажется для них зоной проводимости. Такое в-во – **полупроводник**. Если ширина запрещ. зоны порядка неск. эВ, тепловое движение не сможет забросить в своб. зону заметное число э-нов. В этом случае кристалл – **диэлектрик**.

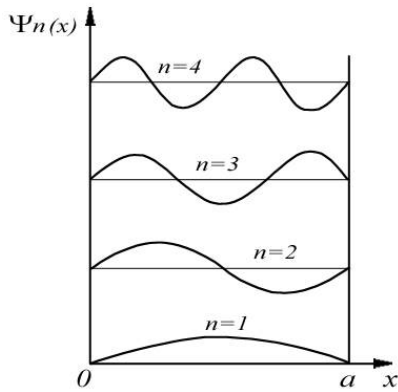
## 2. Ядерная модель атома Резерфорда-Бора. Постулаты Бора.

Изучение рассеяния  $\alpha$ -частиц в тонкой металлической фольге позволило Резерфорду сделать вывод о распределении электрического заряда в атоме и прийти к ядерной (планетарной) модели атома. **Опыт Резерфорда.** Выделяемый отверстием узкий пучок частиц падал на тонкую металлическую фольгу. При прохождении через фольгу частицы отклонялись. Оказалось, что некоторое количество частиц рассеивается на очень большие углы (почти до 180). Резерфорд пришел к выводу, что столь сильное отклонение частиц возможно только в случае чрезвычайно сильного электрического поля=>Резерфорд предложил **ядерную модель атома**: атом представляет собой систему зарядов, в центре которого ядро с зарядом  $Ze$ , а вокруг ядра расположены  $Z$  электронов. **Формула Резерфорда:**  $dN_{\nu}/N = na(Ze^2/m_{\alpha}v^2)^2 d\Omega/\sin^4(\nu/2)$ , где  $dN_{\nu}$  - поток частиц, рассеиваемый в пределах  $\nu.. \nu+d\nu$ ,  $n$ -концентрация атомов,  $a$  – толщина фольги,  $d\Omega$  - телесный угол, в пределах которого заключены направления, соответствующие углам рассеяния. **Постулаты Бора. 1.** Электрон в атоме может двигаться только по определенным стационарным орбитам. Движущийся по стационарной замкнутой орбите электрон, вопреки законам классической электродинамики, не излучает энергии. **2.** Разрешенными стационарными орбитами являются только те, для которых угловой момент импульса  $L$  электрона равен целому кратному величине постоянной Планка  $\hbar$ . Поэтому для  $n$ -ой стационарной орбиты выполняется условие квантования  $L=n\hbar$ . **3.** Излучение или поглощение кванта излучения происходит при переходе атома из одного стационарного состояния в другое. При этом частота  $\omega$  излучения атома определяется разностью энергий атома в двух стационарных состояниях, так что  $\hbar\omega_{nk} = E_k - E_n$ .

### Билет №25

1. Частица в одномерной потенциальной яме с бесконечно высокими стенками. Квантование энергии. Плотность вероятности нахождения частиц для различных состояний.

$U(x) = \{\infty: x < 0; 0: 0 < x < a; \infty: x > a\}$ . Уравнение Шредингера  $\frac{d^2\psi}{dx^2} + \frac{2m_0}{\hbar^2}[E - U(x)]\psi = 0$ . В силу



непрерывности волновая функция  $\psi(x)$  должна обращаться в нуль и на границах ямы: при  $x=0$  и при

$x=a$ . Введем обозначение  $k = \sqrt{\frac{2m_0 E}{\hbar^2}}$ .

$\Rightarrow \psi'' + k^2\psi = 0 \Rightarrow \psi(x) = A \sin(kx + \alpha)$ . Т.к.  $\psi(0) = 0$ , то

$A \sin(\alpha) = 0 \Rightarrow \alpha = 0$  ( $\alpha = -\pi$  отбрасываем, т.к. физ. смысл имеет только квадрат модуля волновой функции). Т.к.

$\psi(a) = 0 \Rightarrow A \sin(ka) = 0 \Rightarrow ka = \pm \pi n, n = 1, 2, 3, \dots$  ( $n=0$  отбрасываем, т.к. в этом случае частицы не существует). Подставляя

значения для  $k$ , получим  $E_n = \frac{\pi^2 \hbar^2}{2m_0 a^2} n^2, n = 1, 2, 3, \dots$  т.е.

энергия **квантуется**. Получаем  $\psi_n(x) = A \sin \frac{\pi n x}{a}$ .

$$\int_0^a |\psi_n(x)|^2 dx = A^2 \int_0^a \sin^2 \frac{\pi n x}{a} dx = A^2 \frac{a}{2} = 1. \Rightarrow A = \sqrt{\frac{2}{a}} \Rightarrow \psi_n(x) = \sqrt{\frac{2}{a}} \sin \frac{\pi n x}{a}, \quad 0 < x < a,$$

## 2. Атом во внешнем магнитном поле. Эффект Зеемана.

При помещении магнитного момента  $\vec{p}^M$  во **внешнее магнитное поле** с индукцией  $\vec{B}$ , он приобретает дополнительную энергию за счет магнитного взаимодействия  $W = -\vec{p}^M \vec{B} = -p_z^M B$ . Поэтому, если изолированный атом с энергией  $E$  в состоянии с квантовым числом  $J$  попадает в магнитное поле, то энергия уровня  $E$  изменяется так, что это изменение, в зависимости от взаимной ориентации магнитного момента и поля, соответствует одному из  $2J+1$  возможных значений  $\Delta E_j = -p_{Jz}^M B = g \mu_B m_j B. \Rightarrow$

Расщепление  $\Delta E = g \mu_B B = g \Delta E_0$ . **Эффект Зеемана** - эффект расщепления спектральных линий в магнитном поле. Наиболее простой случай соответствует расщеплению одиночной линии, обусловленной переходами между энергетическими уровнями, для

которых  $S=0 \Rightarrow g = 1 + \frac{J(J+1) + S(S+1) - L(L+1)}{2J(J+1)}, g=1 \Rightarrow \Delta E = \Delta E_0$ . Смещение частоты  $\Delta \omega_0 = \frac{\Delta E_0}{\hbar} = \frac{\mu_B}{\hbar} \cdot B$  -

нормальное смещение. Такой случай расщепления спектральной линии на зеемановский триплет называется **простым** или **нормальным эффектом Зеемана**. Для переходов между уровнями с  $S \neq 0$  у расщепленной спектральной линии оказывается больше трех компонент, а величина расщепления отличается от нормального. Такое расщепление спектральных линий называется **сложным** или **аномальным эффектом Зеемана**.

## Билет №26

### 1. Уравнение Шредингера, его свойства. Вероятностная интерпретация волновой функции.

Общее **временное уравнение Шредингера**, позволяющее определить в любой момент времени волновую функцию  $\psi$  для частицы массы  $m_0$ , движущейся в силовом поле  $\vec{F} = -\text{grad}U$ , описываемом скалярной потенциальной функцией  $U(x, y, z, t)$ , имеет вид

$$i\hbar \frac{\partial \Psi}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m_0} \Delta \Psi + U \Psi$$

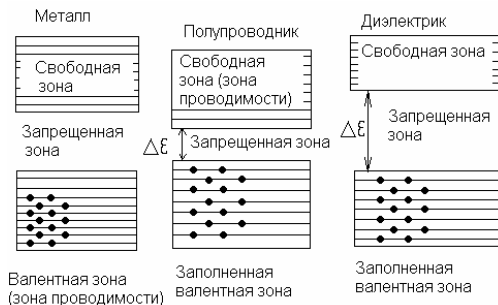
. Свойства уравнения для свободной частицы, с кинетической энергией  $E = p^2/2m_0$ , движущейся в отсутствие силовых полей ( $U=0, \vec{F}=0$ ) в направлении оси  $x$ , решением соответствующего уравнения Шредингера является волновая функция  $\psi(x, t) = A \exp\{-(-i/\hbar)(Et - px)\}$ , соответствующая плоской волне де Бройля. Этот факт позволяет утверждать, что и в общем случае уравнение Шредингера является **волновым уравнением**. **Линейность** этого уравнения обуславливает принцип суперпозиции квантовых состояний. **Первый постулат квантовой механики**. Состояние частицы в квантовой механике описывается заданием волновой функции  $\psi(x, y, z, t)$ , являющейся функцией пространственных координат и времени. **Вероятностный смысл волновой**



**функции.** Квадрат модуля волновой функции  $\psi(x,y,z,t)$  определяет плотность вероятности  $w$  того, что в момент времени  $t \geq 0$  частица может быть обнаружена в точке пространства  $M=M(x,y,z)$  с координатами  $x, y$  и  $z$ .  $w=dP/dV=|\psi|^2=\psi^*\psi$ .

## 2. Зонная теория твердых тел. Структура зон в металлах, полупроводниках и диэлектриках.

На валентные электроны в кристалле действует периодическое поле решетки, что приводит к тому, что спектр возможных значений энергии валентных электронов



распадается на ряд чередующихся разрешенных и запрещенных зон. В пределах **разрешенных зон** энергия изменяется квазинепрерывно.

Значения энергии, принадлежащие **запрещенным зонам**, не могут реализоваться.

**Валентной зоной** (в случае металла ее также называют *зоной проводимости*) называют разрешенную зону, возникшую из того уровня, на котором находятся валентные электроны в основном состоянии атома. В случае Ме эл-ны

заполняют валентную зону неполностью, поэтому достаточно сообщить э-нам совсем небольшую энергию ( $10^{-22}$  эВ), чтобы перевести их на более высокие уровни. В случаях п/пр-ка и диэлектрика уровни вал. зоны полностью заняты электронами. Для того чтобы увеличить энергию э-на необх. сообщить ему кол-во энергии  $\geq$ , чем ширина запрещ. зоны. Если эта ширина невелика (неск. десятых эВ), то энергии теплового движения оказывается достаточно. Свободная зона окажется для них зоной проводимости. Такое в-во – **полупроводник**. Если ширина запрещ. зоны порядка неск. эВ, тепловое движение не сможет забросить в своб. зону заметное число э-нов. В этом случае кристалл – **диэлектрик**.

### Билет №27

#### 1. Элементарные частицы. Виды взаимодействий элементарных частиц. Классификация частиц. Лептоны и адроны. Кварковая структура адронов.

Элементарные частицы - простейшие структурные элементы материи, которые на современном уровне развития физики нельзя считать соединением других частиц.



Элементарные частицы различаются:

- по массам покоя - на лептоны, мезоны и барионы;
- по наличию электрического заряда - на положительные, отрицательные и нейтральные;
- по времени жизни - на стабильные и нестабильные.

В настоящее время известны четыре вида взаимодействий между эл. частицами: сильное ( $A=1, P=10^{-15} \text{ м}, T=10^{-23} \text{ с}$ ), электромагнитное ( $10^{-2}, \infty, 10^{-16} \text{ с}$ ), слабое ( $10^{-6}, 10^{-18} \text{ м}, 10^{-8} \text{ с}$ ) и гравитационное ( $10^{-38}, \infty, -$ ). Интенсивность взаимодействия обычно характеризуют с помощью так называемой константы взаимодействия  $A$ , кот. представл. собой безразмерный параметр.  $P$  – радиус действия.

*Сильное взаимодействие* – силы, связывающие нуклоны в атомном ядре.

*Электромагнитное взаим.* – вызывают разлёт осколков, образующихся при делении ядер.

*Слабое взаим.* – бета-распад, многие распады элементарных частиц (мюонов, пи-мезонов и др.), реакции, происходящие на Солнце и др. звёздах

*Гравитационное взаим.* – самые слабые, играют роль для тел с большой массой.

Классификация элементарных частиц.

Переносчики взаимодействий	Лептоны	Адроны		
		Мезоны	Барионы	
			Нуклоны	Гипероны
$\gamma, W^{+-}$ и $Z^0$ бозоны, глюоны	$e, \tau, \mu,$ $\nu_e, \nu_\mu, \nu_\tau$	$\pi, K, \eta$ и резонансы	$p, n$	$\Lambda, \Omega, \Xi, \Sigma$ и резонансы

Лептоны – эл. частицы, не участвующие в сильном взаим. и имеющие спин  $1/2$ , т.е. лептоны – ферми-частицы.

Адроны – эл. частицы, участвующие в сильном взаим. Мезоны – адроны, обладающие нулевым или целочисленным спином, мезоны – бозе-частицы. Барионы – адроны с полуцелым спином, барионы – ферми-частицы. Существуют барионные заряды (квантовые числа)  $B$ , для барионов  $B=1$ , для анти барионов  $B=-1$ , для остальных частиц  $B=0$ . Аналогично вводят лептонные числа. Опыт показывает, что для них действует закон сохранения.

Кварковая структура адронов. Существует 6 типов кварков, спин у всех равен  $1/2$ , барионный заряд у всех  $1/3$ .

Кварк	Электрический заряд	Странность	Шарм (Очарование) $C$	Красота	Правдивость (истинность)
u	+2/3	0	0	0	0
d	-1/3	0	0	0	0
s	-1/3	-1	0	0	0
c	+2/3	0	1	0	0
b	-1/3	0	0	1	0
t	+2/3	0	0	0	1

## 2. Эмиссия электронов из металла. Эффект Шоттки. Холодная (автоэлектронная) эмиссия.

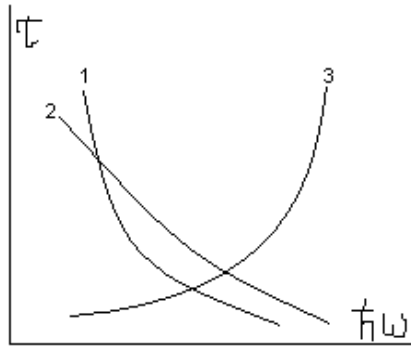
Наименьшая энергия, которую необходимо сообщить эл-ону для того чтобы удалить его из твердого или жидкого тела в вакуум, называется **работой выхода**. Ее обозначают  $e\phi$ , где  $\phi$  - величина, называемая потенциалом выхода. Работа выхода электрона из металла определяется выражением:  $e\phi = E_{p0} - E_F$  (в предположении, что температура металла равна 0 К ( $E_{p0}$  - полная работа выхода)). При других температурах работу выхода также определяют как разность глубины потенциальной ямы и уровня Ферми. Работа выхода сильно зависит от состояния поверхности металла. При температурах, отличных от абсолютного нуля, имеется некоторое кол-во эл-нов, энергия которых достаточна для того, чтобы преодолеть потенциальный барьер на границе металла. При повышении температуры их кол-во растет. Испускание эл-онов нагретым металлом называется **термоэлектронной эмиссией**. Ее исследование осуществляется с помощью вакуумного диода. Катод нагревается током от внешней батареи, а на оба электрода подается напряжение от анодной батареи. С ростом  $U_a$  все больше электронов отсасывается электр. полем к аноду и при определенном значении

$U_a$  все вылетевшие из катода эл-оны получают возможность достигнуть анода. Дальнейший рост  $U_a$  не может увеличить силу анодного тока-ток достигает насыщения. **Ток насыщения характеризует эмиссию.** Если в единицу времени с единицы поверхности катода вылетает  $N$  эл-онов, то плотность тока насыщения будет равна  $j_{нас} = Ne$ . Изменяя плотность тока насыщения при различной силе тока накала, можно найти кол-во эл-онов, вылетающих с единицы пов-ности при разных температурах.  $j_{нас} = AT^2 \exp\{-e\phi/kT\}$  - **формула Ричардсона-Дешмана**.  $A = \text{конст.}$  График этой ф-ции - ветвь параболы в первой плоскости. Формула Ричардсона отличается только наличием  $T^{1/2}$  вместо  $T^2$ .

## Билет №28

1. Взаимодействие ядерных излучений с веществом. Детектирование различных излучений. Дозиметрия и защита.

**Доза излучения** – энергия, поглощенная веществом на ед. массы. **Мощность дозы** – доза за ед. времени [1 Гр(грей) – 1 кг за 1 с получит 1Дж]. **Экспозиционная доза** – доза рентген и  $\gamma$ -излучения, определяемая по ионизации воздуха. Это отношение суммарного заряда ионов 1-го знака, созданных в воздухе на массу этого воздуха



$D = (\sum \Delta Q) / \Delta m = \text{Кл/кг} = \text{рентген}$ ,  $1 \text{ P} = 2,5 \cdot 10^{-4} \text{ Кл/кг}$ .

**Эквивалентная доза** – доза на коэф-т качества  $H = D \cdot K$  ( $K$  показывает на сколько выше радиационная опасность в случае хронического облучения человека для данного излучения при одинаковой поглощенной дозе). **В – биологический эквивалент рентгена** – доза любого ионизированного излучения, производящего такое же биологическое действие как и доза  $\gamma$ -лучей в 1 рентген.

$1 \text{ Зб(зибберт)} = 1 \text{ Бэр} = 1 \text{ Дж/кг}$ . 40-200 мБэр в год –

норма. Онкологическая норма – не больше 10 Гр за 3-4 недели. **Прохождение излучения через вещество.**  $I = I_0 e^{-\tau x}$ , где  $\tau$  – коэф-т поглощения. 1- фотоэффект 2 – комптоновский эффект 3 – рождение пары  $e^- + n$  **Регистрация частиц.** 1) трековый детектор а) камера Вильсона (трек за счет конденсации на ионах пересыщенных паров какой-либо жидкости) б) Диффузионная камера (-||-), в) пузырьковая камера (пересыщенные пары заменены прозрачной перегретой жидкостью, частица оставляет трек из пузырьков пара), в) искровая камера (искры на металлических электродах) г) Эмульсионная камера (действие на фотоэмульсию). 2) счетчики: а) сцинтилляционные счетчики (пр-п: заряж. частица, пролет. через в-во, вызывает возбуждение атомов, затем атомы испускают регистр. видимый свет), б) полупроводниковые счетчики (частица, проходя через запертый диод, порождает эл-ны и дырки=>возникает эл. импульс).

2. Работа выхода электрона из металла. Термоэлектронная эмиссия. Формула Ричардсона-Дэнемена.

Наименьшая энергия, которую необходимо сообщить эл-ону для того чтобы удалить его из твердого или жидкого тела в вакуум, называется **работой выхода**. Ее обозначают  $e\phi$ , где  $\phi$  - величина, называемая потенциалом выхода. Работа выхода электрона из металла определяется выражением:  $e\phi = E_{p0} - E_F$  (в предположении, что температура металла равна 0 К ( $E_{p0}$  - полная работа выхода)). При других температурах работу выхода также определяют как разность глубины потенциальной ямы и уровня Ферми. Работа выхода сильно зависит от состояния пов-ности металла. При температурах, отличных от абсолютного нуля, имеется некоторое кол-во эл-нов, энергия которых достаточна для того, чтобы преодолеть потенциальный барьер на границе металла. При повышении температуры их кол-во растет. Испускание эл-онов нагретым металлом называется **термоэлектронной эмиссией**. Ее исследование

осуществляется с помощью вакуумного диода. Катод нагревается током от внешней батареи, а на оба электрода подается напряжение от анодной батареи. С ростом  $U_a$  все больше электронов отсасывается электр. полем к аноду и при определенном значении  $U_a$  все вылетевшие из катода эл-оны получают возможность достигнуть анода. Дальнейший рост  $U_a$  не может увеличить силу анодного тока-ток достигает насыщения. **Ток насыщения характеризует эмиссию.** Если в единицу времени с единицы поверхности катода вылетает  $N$  эл-онов, то плотность тока насыщения будет равна  $j_{нас} = Ne$ . Изменяя плотность тока насыщения при различной силе тока накала, можно найти кол-во эл-онов, вылетающих с единицы пов-ности при разных температурах.  $j_{нас} = AT^2 \exp\{-e\phi/kT\}$  - **формула Ричардсона-Дешмана**.  $A = \text{конст.}$  График этой ф-ции - ветвь параболы в первой плоскости. Формула Ричардсона отличается только наличием  $T^{1/2}$  вместо  $T^2$ .

### Билет №29

1. Тепловое излучение. Интегральные и спектральные характеристики излучения. Закон Кирхгофа. Закон Стефана-Больцмана. Закон смещения Вина.

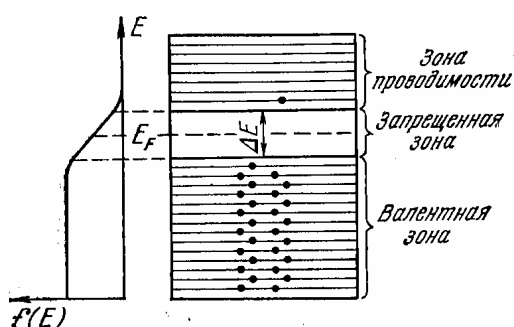
В нагретых телах часть внутренней энергии вещества может превращаться в энергию излучения. Поэтому нагретые тела являются источниками электромагнитного излучения в широком диапазоне частот. Это излучение называют **тепловым излучением**. Способность теплового излучения находиться в **равновесии** с излучающим телом отличает тепловое излучение от других видов излучения тел.

**Характеристики теплового излучения.** Поток лучистой энергии, излучаемой единицей поверхности нагретого тела в единицу времени в узком диапазоне частот  $d\omega$ :  $dR = r d\omega$ , где  $r$  - **спектральная испускательная способность** тела или **спектральная плотность энергетической светимости**.  $R = \int_0^\infty r_{\omega,T} d\omega$  - **интегральная испускательная способность** тела или его **энергетическая светимость**.  $r_{\omega,T} d\omega = r_{\lambda,T} d\lambda \Rightarrow r_{\lambda,T} = r_{\omega,T} d\omega / d\lambda = r_{\omega,T} (2\pi c / \lambda^2)$ . **Спектральная поглотительная способность**  $a_{\omega,T} = d\Phi'_{\omega} / d\Phi_{\omega}$ .  $d\Phi'_{\omega}$  - поток, поглощенный телом,  $d\Phi_{\omega}$  - поток, падающий на тело. Тело, у которого поглотительная способность меньше единицы и одинакова по всему диапазону частот, называют **серым телом**. **Абсолютно черное тело** - тело, у которого на всех частотах и при любых температурах поглотительная способность равна

единице. **Закон Кирхгоффа.**  $\left(\frac{r_{\omega,T}}{a_{\omega,T}}\right)_1 = \left(\frac{r_{\omega,T}}{a_{\omega,T}}\right)_2 = \left(\frac{r_{\omega,T}}{a_{\omega,T}}\right)_3 = \dots = \frac{r_{\omega,T}^*}{1} = f(\omega, T)$ ,  $r^*$  - спектральные испускательные способности АЧТ по шкале частот или длин волн. **Закон Стефана-Больцмана.**  $R^* = \sigma T^4$ . Постоянная Стефана-Больцмана  $\sigma = 5,6686 \text{ Вт}/(\text{м}^2(\text{К}^4))$ . **Закон**

**смещения Вина.**  $r_{\omega,T}^* = \omega^3 f\left(\frac{\omega}{T}\right) \Rightarrow r_{\lambda,T}^* = \frac{(2\pi c)^4}{\lambda^5} f\left(\frac{2\pi c}{\lambda T}\right) \Rightarrow \lambda_m T = \text{const} \Rightarrow \lambda_m = \frac{b}{T}$ , где  $b = 2,898 \cdot 10^{-3} \text{ м/К}$ .

2. Собственная проводимость полупроводников. Концентрация электронов и дырок в чистых полупроводниках. Температурная зависимость проводимости беспримесных полупроводников. Уровень Ферми в чистых полупроводниках.



**Собственная проводимость** возникает в результате перехода электронов с верхних уровней валентной зоны в зону проводимости. При этом в зоне проводимости появляется несколько носителей тока – электронов, занимающих место вблизи дна зоны; одновременно в валентной зоне освобождается такое же число мест на верхних уровнях, в результате чего появляются дырки. При достаточно высокой температуре тепловое

движение может разорвать отдельные связи, освободив один э-н. Покинутое место э-ном перестает быть нейтральным, в его окрестности возникает избыточный положительный заряд «+е», т.е. образуется дырка. На это место может перескочить э-н одной из соседних пар. В результате дырка начинает также странствовать по кристаллу, как и освобожденный э-н. **Уровень Ферми** для чистых полупроводников лежит посередине запрещенной зоны  $E_F = \Delta E/2$ . **Распределение электронов** по уровням валентной зоны и зоны проводимости описывается **функцией Ферми-Дирака**  $\langle n_i \rangle = 1 / [\exp\{(E_i - E_F)/kT\} + 1]$ . Уровни зоны проводимости лежат на хвосте кривой распределения, поэтому вероятность их заполнения электронами – распределение Больцмана  $f(E) = \text{const} \exp\{-\Delta E/2kT\}$ , полагая  $E - E_F = \Delta E/2$ . Каждой температуре соотв. опр. **равновесная концентрация э-нов и дырок**, ктр. изменяется пропорционально этому выражению.  $\Rightarrow$  Электропроводность собственных полупроводников  $\sigma = \sigma_0 \exp\{-\Delta E/2kT\}$ , где  $\sigma_0$  - величина, изменяющаяся с температурой гораздо медленнее, чем экспонента, поэтому ее в первом приближении можно считать константой.

### Билет №30

1. Частица в трехмерном потенциальном ящике. Энергетический спектр частицы. Понятие о вырождении энергетических уровней.

**Потенциальный ящик:**  $G = \{(x, y, z): 0 < x < a_1, 0 < y < a_2, 0 < z < a_3\}$ .  $U(x, y, z) = \begin{cases} 0: (x, y, z) \in G, \\ \infty: (x, y, z) \notin G \end{cases}$ . Будем искать волновую функцию в виде произведения:  $\psi(x, y, z) = \psi_1(x) \psi_2(y) \psi_3(z) \Rightarrow (1/\psi_1(x))(d^2\psi_1(x)/dx^2) + (1/\psi_2(y))(d^2\psi_2(y)/dy^2) + (1/\psi_3(z))(d^2\psi_3(z)/dz^2) = -2m_0E/\hbar^2$ . Первое слагаемое в левой части зависит только от  $x$ , а второе - только от  $y$ .

Поскольку их сумма равна постоянной величине, то это означает, что каждое из слагаемых также представляет собой постоянную величину. Получаем три одномерных уравнения:  $d^2\psi_1(x)/dx^2 + 2m_0E_1\psi_1(x)/\hbar^2 = 0$ ,  $d^2\psi_2(y)/dy^2 + 2m_0E_2\psi_2(y)/\hbar^2 = 0$ ,

$d^2\psi_3(z)/dz^2 + 2m_0E_3\psi_3(z)/\hbar^2 = 0 \Rightarrow \psi_{n_1}(x) = \sqrt{\frac{2}{a_1}} \sin \frac{\pi n_1 x}{a_1}$ , аналогично для  $\psi_2(y)$  и  $\psi_3(z) \Rightarrow$

$$\psi_{n_1, n_2, n_3}(x, y, z) = \sqrt{\frac{8}{a_1 a_2 a_3}} \sin \frac{\pi n_1 x}{a_1} \sin \frac{\pi n_2 y}{a_2} \sin \frac{\pi n_3 z}{a_3}, \quad E_{n_1, n_2, n_3} = \frac{\pi^2 \hbar^2}{2m_0} \left[ \left(\frac{n_1}{a_1}\right)^2 + \left(\frac{n_2}{a_2}\right)^2 + \left(\frac{n_3}{a_3}\right)^2 \right].$$

Энергетический уровень, которому соответствует не одно, а несколько состояний частицы, называется **вырожденным уровнем**, а число соответствующих ему состояний называется **кратностью вырождения** или степенью вырождения уровня.

2. Принцип неразличимости тождественных частиц в квантовой механике. Симметричные и антисимметричные состояния тождественных микрочастиц. Фермионы и бозоны. Принцип Паули.

Основа квантовой статистики – принципиальная неразличимость одинаковых частиц.

**Перестановка местами двух квантовых частиц не приводит к новому**

**микросостоянию.** Волновые ф-ии должны быть симметричными или

антисимметричными по отношению к перестановке любой пары частиц, причем

первый случай имеет место для частиц с целым спином, а второй с полуцелым. Для

системы частиц, описываемой антисимметричными ф-ями справедлив принцип

Паули: в каждом квантовом состоянии может находиться одновременно не более одной

частицы. Статистика, основанная на этом принципе, называется статистикой Ферми-

Дирака. Частицы, подчиняющиеся этой статистике – **фермионы**. К их числу относят

все частицы с *полуцелым* спином. Статистика Бозе-Эйнштейна, ктр. подчиняются

частицы с *целым* спином. Частицы подчиняющиеся этой статистике – **бозоны**. Не

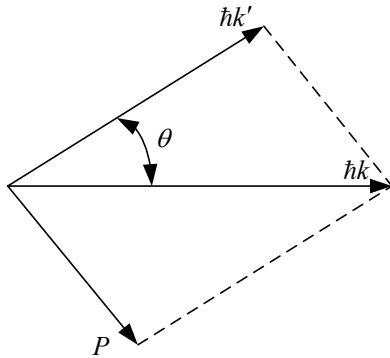
выполняется принцип Паули; вероятность  $P$  возникновения бозона в состоянии, в ктр.

уже имеется  $n$  частиц, пропорциональна  $n$ . Обе статистики подчиняются принципу

тождественности одинаковых микрочастиц.

### Задача №1

Фотон с энергией  $E_1$  рассеялся на свободном электроне под углом  $\theta$ . Считая, что электрон до соударения покоился, найдите энергию  $E_2$  рассеянного фотона.



$$\begin{cases} \hbar \omega + m c^2 = \hbar \omega' + c \sqrt{p^2 + m^2 c^2} \\ \hbar \bar{k} = \bar{p} + \hbar \bar{k}' \end{cases}$$

$$\sqrt{p^2 + m^2 c^2} = \hbar (k - k') + m c$$

$$\begin{cases} p^2 = \hbar^2 (k^2 + k'^2 - 2 k k' \cos \theta) + 2 \hbar m c (k - k') \\ p^2 = \hbar^2 (\bar{k} - \bar{k}')^2 = \hbar^2 (k^2 + k'^2 - 2 k k' \cos \theta) \end{cases}$$

$$m c (\hbar k - \hbar k') = \hbar k \cdot \hbar k' (1 - \cos \theta)$$

$$\frac{\hbar \omega}{c} = \hbar k = \frac{E}{c} \Rightarrow m c \left( \frac{E_1}{c} - \frac{E_2}{c} \right) = \frac{E_1 \cdot E_2}{c^2} (1 - \cos \theta)$$

$$E_2 = \frac{E_1 m}{m + \frac{E_1}{c^2} (1 - \cos \theta)}$$

### Задача №2

Рассчитайте активность одного грамма  ${}_{88}^{226}\text{Ra}$ , если период полураспада этого изотопа  $T_{\frac{1}{2}} = 1620$  лет.

$$\hbar \omega = \frac{m(V_{\max})^2}{2} + A \Rightarrow$$

$$A = \frac{hc}{\lambda} - \frac{m(V_{\max})^2}{2};$$

$$\lambda_{\text{кр}} = \frac{hc}{A} = \frac{hc}{\frac{hc}{\lambda} - \frac{m(V_{\max})^2}{2}}$$

### Задача №3

Во сколько раз изменится при повышении температуры от  $T_1 = 300$  К до  $T_2 = 320$  К электропроводность  $\sigma$  собственного полупроводника, ширина запрещенной зоны которого равна  $\Delta E = 0,330$  эВ.

$$\hbar \omega = \frac{m(V_{\max})^2}{2} + A \Rightarrow$$

$$A = \frac{hc}{\lambda} - \frac{m(V_{\max})^2}{2};$$

$$\lambda_{\text{кр}} = \frac{hc}{A} = \frac{hc}{\frac{hc}{\lambda} - \frac{m(V_{\max})^2}{2}}$$

### Задача №4

Кинетическая энергия  $E_k$  электрона в атоме водорода составляет величину порядка 10 эВ. Используя соотношение неопределенностей оцените минимальные линейные размеры атома.

$$\Delta p \cdot \Delta x \geq \hbar, \text{ примем:}$$

$$\Delta p = p = \sqrt{2mE},$$

$$\Delta x = l \Rightarrow$$

$$l \cdot \sqrt{2mE} \geq \hbar \Rightarrow l \geq \frac{\hbar}{\sqrt{2mE}}.$$

### Задача №5

В некоторый момент времени частица находится в состоянии, описываемом волновой функцией, координатная часть которой имеет вид  $\psi(x) = A \cdot \exp\left(-\frac{x^2}{a^2} + ikx\right)$ , где  $A$  и  $a$  – некоторые постоянные, а  $k$  – заданный параметр, имеющий размерность обратной длины.

$$\langle x \rangle = \frac{\int_0^\infty \Psi^* \hat{x} \Psi dx}{\int_0^\infty \Psi^* \Psi dx} = \frac{\int_0^\infty \left( A e^{-\frac{x^2}{a^2} + ikx} \right) \cdot x \cdot \left( A e^{-\frac{x^2}{a^2} - ikx} \right) dx}{\int_0^\infty \left( A e^{-\frac{x^2}{a^2} + ikx} \right) \cdot \left( A e^{-\frac{x^2}{a^2} - ikx} \right) dx} =$$

$$= \frac{\int_0^\infty x \cdot e^{-\frac{2x^2}{a^2}} dx}{\int_0^\infty e^{-\frac{2x^2}{a^2}} dx} = \frac{\frac{1}{2} \cdot \int_0^\infty e^{-\frac{2x^2}{a^2}} dx^2}{\frac{\sqrt{\pi}}{2} \left( \frac{2}{a^2} \right)^{-\frac{1}{2}}} = \frac{\frac{1}{2} \cdot \left( -\frac{a^2}{2} \right) e^{-\frac{2x^2}{a^2}} \Big|_0^\infty}{\frac{\sqrt{\pi}}{2} \left( \frac{2}{a^2} \right)^{-\frac{1}{2}}} = \frac{\frac{a^2}{4}}{\frac{a}{2} \sqrt{\frac{\pi}{2}}} = \frac{a}{\sqrt{2\pi}}$$

### Задача №6

При очень низких температурах красная граница фотопроводимости чистого беспримесного германия  $\lambda_{kp} = 1,7$  мкм. Найдите температурный коэффициент сопротивления  $\alpha = \frac{1}{\rho} \cdot \frac{d\rho}{dT}$  данного германия при комнатной температуре.

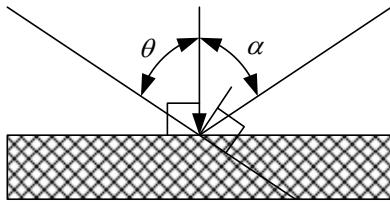
$$\rho = \frac{1}{\sigma} = \frac{1}{\sigma_0 \cdot e^{-\frac{\Delta E}{kT}}} = \frac{1}{\sigma_0} e^{\frac{\Delta E}{kT}}; \quad \frac{d\rho}{dT} = \frac{\Delta E}{k\sigma_0} e^{\frac{\Delta E}{kT}} \cdot \left( -\frac{1}{T^2} \right);$$

$$\alpha = \frac{1}{\rho} \cdot \frac{d\rho}{dT} = \frac{\sigma_0}{e^{\frac{\Delta E}{kT}}} \cdot \frac{\Delta E}{k\sigma_0} e^{\frac{\Delta E}{kT}} \cdot \left( -\frac{1}{T^2} \right) = -\frac{\Delta E}{kT^2}; \quad \Delta E = \frac{hc}{\lambda} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \alpha = -\frac{hc}{\lambda kT^2}$$

### Задача №7

Узкий пучок моноэлектрических нерелятивистских электронов нормально падает на поверхность монокристалла в направлении, составляющим угол  $\alpha = 60^\circ$  с нормалью к поверхности, наблюдается максимум отражения электронов третьего порядка. Определите ускоряющую разность потенциалов, которую прошли электроны, если расстояние между отражающими атомными плоскостями кристалла  $d = 0,2$  нм.



$$\theta = 90^\circ - \frac{\alpha}{2} = 60^\circ$$

$$\lambda_B = \frac{2\pi\hbar}{\sqrt{2mE}} = \frac{2\pi\hbar}{\sqrt{2meU}}$$

$$2 \cdot d \cdot \sin\theta = n \cdot \lambda_B, \quad n = 3 \Rightarrow$$

$$2 \cdot d \cdot \sin 60^\circ = 3 \cdot \lambda_B = \frac{6\pi\hbar}{\sqrt{2meU}}$$

$$\alpha\sqrt{3} \cdot \sqrt{2meU} = 6\pi\hbar \Rightarrow 2meU = \frac{12\pi^2\hbar^2}{d^2} \Rightarrow U = \frac{6\pi^2\hbar^2}{med^2}$$

### Задача №8

Используя соотношение неопределенностей энергии и времени, определите естественную ширину  $\Delta\lambda$  спектральной линии излучения атома при переходе его из возбужденного состояния в основное. Среднее время жизни атома в возбужденном состоянии  $\tau = 10^{-8}$  с, а длина волны излучения  $\lambda = 600$  нм.

$$\hbar \cdot \Delta\omega = E_2 - E_1; \quad \Delta E_1 = \frac{\hbar}{\Delta t_1}; \quad \Delta E_2 = \frac{\hbar}{\Delta t_2};$$

$$\Delta t_2 = \tau; \quad \Delta t_1 = \infty$$

(т.к. в основном состоянии может  $\exists \infty$  долго)  $\Rightarrow$

$$\Delta E_1 = 0, \quad \Delta E_2 = \frac{\hbar}{\tau}$$

$$\hbar \cdot \Delta\omega = \Delta E_2 = \frac{\hbar}{\tau} \Rightarrow \Delta\omega = \frac{1}{\tau} = 10^8 \text{ Гц}$$

### Задача №9

При увеличении термодинамической температуры  $T$  абсолютно черного тела в  $\eta = 2$  раза длина волны  $\lambda_m$ , на которую приходится максимум спектральной плотности энергетической светимости, уменьшилась на  $\Delta\lambda = 400$  нм. Определите начальную и конечную температуры тела  $T_1$  и  $T_2$ .

$$\lambda_m \cdot T = b$$

$$\lambda_m \cdot T_1 = b \Rightarrow T_1 = \frac{b}{\lambda_m}; \quad T_2 = 2 \cdot T_1 = \frac{2b}{\lambda_m}$$

$$b = 2,90 \cdot 10^{-3} \text{ м} \cdot \text{К}$$

### Задача №10

В кровь человека ввели небольшое количество раствора, содержащего  $^{24}\text{Na}$  с активностью  $A = 2,0 \cdot 10^{-3}$  Бк. Активность  $1 \text{ см}^3$  через  $t = 5,0$  ч оказалась  $A' = 0,267$  Бк/см<sup>3</sup>. Период полураспада данного изотопа  $T_{1/2} = 15$  ч. Найдите объем крови человека.



$$V \cdot A = A_0 \cdot e^{-\frac{\ln 2 \cdot t}{T}};$$

$$V = \frac{A_0}{A} e^{-\frac{\ln 2}{3}} = \frac{2000}{0,267} e^{-\frac{\ln 2}{3}} \approx 6 \text{ л.}$$

### Задача №11

Масс-спектрометрический анализ образцов лунной породы показал, что отношение количества атомов  $Ar$  и  $^{40}K$  в ней равно  $\eta = 10,3$ . Считая, что аргон целиком образовался из калия в результате радиоактивного распада, определите возраст лунной породы. Период полураспада  $^{40}K$  составляет  $T_{\frac{1}{2}} = 1,25 \cdot 10^3$  лет.

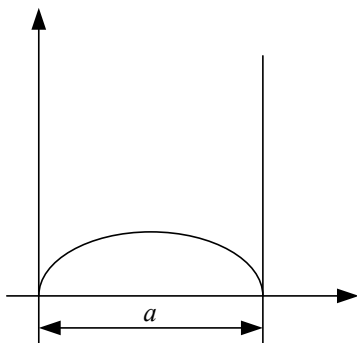
$$N_K^{нач} = (N_K + N_{Ar}) e^{-\frac{\ln 2}{T_{1/2}} t};$$

$$1 = 11,3 * e^{-\frac{\ln 2}{T_{1/2}} t}$$

$$t = 4,37 * 10^9 \text{ лет}$$

### Задача №12

Частица массой  $m$  находится в одномерной прямоугольной потенциальной яме шириной  $a$  с бесконечно высокими стенками в основном состоянии. Найдите среднее значение квадрата импульса  $\langle p^2 \rangle$  в этом состоянии.



$$\Psi_1(x) = \sqrt{\frac{2}{a}} \sin \frac{\pi x}{a}$$

$$\hat{p}^2 = \left( -i\hbar \frac{\partial}{\partial x} \right)^2 = -\hbar^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2}$$

$$\langle p^2 \rangle = \frac{\int_0^a \Psi^* \hat{p}^2 \Psi dx}{\int_0^a \Psi^* \Psi dx} = -\hbar^2 \frac{\int_0^a \sin \frac{\pi x}{a} \cdot \frac{\partial^2 \sin \frac{\pi x}{a}}{\partial x^2} dx}{\int_0^a \sin^2 \frac{\pi x}{a} dx} = \frac{\pi^2 \hbar^2}{a^2}$$

### Задача №13

До какой температуры нужно нагреть классический электронный газ, чтобы средняя энергия его электронов была равна средней энергии свободных электронов в серебре при  $T = 0$  К? Энергия Ферми серебра  $E_F = 5,51$  эВ.

$$\langle E \rangle = \frac{\int_0^{\infty} E \cdot F(E) dE}{\int_0^{\infty} F(E) dE}, \text{ где } F(E) = \begin{cases} \frac{\sqrt{2} m_0^{3/2}}{\pi^2 \hbar^3} \sqrt{E}, & E < E_F \\ 0, & E > E_F \end{cases} \text{ – функция распределения свободных электронов по энергиям}$$

$$\langle E \rangle = \frac{\int_0^{E_F} E^{3/2} dE}{\int_0^{E_F} E^{1/2} dE} = \frac{3}{5} E_F.$$

Для классического газа:  $\langle E \rangle_{\text{кл}} = \frac{3}{2} kT$

$$T = \frac{2}{5} \frac{E_F}{k} = 2,55 \cdot 10^4 \text{ К.}$$

#### Задача №14

Температурный коэффициент сопротивления  $\alpha = \frac{1}{\rho} \frac{d\rho}{dT}$  чистого беспримесного германия при комнатной температуре равен  $\alpha = -0,05 \text{ К}^{-1}$ . Найдите ширину запрещенной зоны данного полупроводника.

$$\begin{aligned} \sigma(T) &= \sigma_0 e^{\frac{\varepsilon_0}{2kT}} & \Delta E_3 &= -2kT \ln \frac{\sigma}{\sigma_0} = -2kT e^{-\alpha T} \ln \frac{1}{\sigma_0} e^{-\alpha T}; \\ \alpha &= \frac{1}{\rho} \frac{d\rho}{dT} = \frac{d \ln \rho}{dT}; \quad \alpha dT = d \ln \rho; & \rho &= \frac{1}{\sigma}; \quad \sigma(T) = \sigma_0 e^{\frac{\varepsilon_0}{2kT}}; \quad \alpha = \sigma \frac{1}{\sigma^2} \frac{d\sigma}{dT} = \frac{1}{\sigma} \frac{d\sigma}{dT} \left( \frac{\varepsilon_0}{2kT} \right) \\ \rho &= e^{\alpha T}; \quad \sigma = \frac{1}{\rho} = e^{-\alpha T}; & \alpha &= -\frac{\varepsilon_0}{2kT^2}; \quad \varepsilon_0 = -2kT^2 \alpha \end{aligned}$$

#### Задача №15

Воспользовавшись распределением свободных электронов в металле по энергиям, найдите при  $T = 0$  отношение средней скорости свободных электронов к их максимальной скорости.

При абс. нуле max энергия выраженного газа есть энергия Ферми:  $E_F^{(0)} = m_e V_{\text{max}}^2 / 2$

$$V_{\text{max}} = \sqrt{\frac{2E_F^{(0)}}{m_e}} \text{ Для свободных эл-ов: } E = m_e V^2 / 2 \Rightarrow V = \sqrt{\frac{2E}{m_e}}$$

Для f Ферми  $f(E,0)$  имеет вид ступенчатой f  $\Rightarrow$  f распределения эл-на по энергиям:

$n(E) = g(E) \cdot f(E,0)$  для  $T=0$  равно 0. При  $E > E_F^{(0)}$ :

$$\langle V \rangle = \frac{\int_0^{E_F^{(0)}} \sqrt{2E/m_e} g(E) dE}{\int_0^{E_F^{(0)}} g(E) dE} = \sqrt{\frac{2}{m_e}} \cdot \frac{\int_0^{E_F^{(0)}} E dE}{\int_0^{E_F^{(0)}} \frac{1}{E^2} dE} = \sqrt{\frac{2}{m_e}} \cdot \frac{1/2 (E_F^{(0)})^2}{2/3 (E_F^{(0)})^{3/2}} = \frac{3}{4} \sqrt{\frac{2E_F^{(0)}}{m_e}} = V_{\text{cp}}$$

$$\frac{V_{\text{cp}}}{V_{\text{max}}} = \frac{3/4 \sqrt{2E_F^{(0)}/m_e}}{\sqrt{2E_F^{(0)}/m_e}} = \frac{3}{4}$$

#### Задача №16

Волновая функция основного состояния электрона в атоме водорода имеет вид

$$\psi(r) = A \cdot \exp\left(-\frac{r}{a}\right), \text{ где } r \text{ – расстояние от электрона до ядра, } a \text{ – радиус первой}$$

боровской орбиты. Определите наиболее вероятное расстояние  $r_{\text{вер}}$  электрона от ядра.

$$\frac{dp}{dr} = \frac{dp}{dV} \cdot \frac{dV}{dr} = |\Psi|^2 \cdot \frac{d\left(\frac{4}{3}\pi r^3\right)}{dr} = |\Psi|^2 \cdot 4\pi r^2 = 4\pi r^2 A^2 e^{-\frac{2r}{a}}$$

$$\left(4\pi r^2 A^2 e^{-\frac{2r}{a}}\right)' = 8\pi r A^2 e^{-\frac{2r}{a}} - \frac{8}{a}\pi r^2 A^2 e^{-\frac{2r}{a}} = 0$$

$$1 - \frac{r}{a} = 0 \Rightarrow r_{BEP} = a$$

### Задача №17

Оцените с помощью соотношения неопределенностей минимальную кинетическую энергию электрона, движущегося в области, размер которой  $L = 10^{-x}$  м соответствует характерному размеру атомов.

$$\Delta p \cdot \Delta x \geq \hbar$$

$$\Delta x \approx l$$

$$\Delta p \approx p$$

$$K = \frac{p^2}{2m} = \frac{\Delta p^2}{2m}$$

### Задача №18

Воспользовавшись распределением свободных электронов в металле по энергиям, найдите отношение средней кинетической энергии свободных электронов в металле при  $T = 0$  к их максимальной энергии.

### Задача №19

На какую кинетическую энергию должен быть рассчитан ускоритель заряженных частиц с массой покоя  $m_0$ , чтобы с их помощью можно было исследовать структуры с линейными размерами  $l$ ? Решите задачу для электронов в случае  $l = 10^{-15}$  м, что соответствует характерному размеру атомных ядер.

Соотношение неопределенностей:  $\Delta x \Delta p_x \geq \hbar$ . В нашем случае  $\Delta x = l$ , поэтому  $l \Delta p_x \geq \hbar$ . Импульс частицы  $p = \langle p \rangle + \Delta p$ , где  $\Delta p$  – неопределенность импульса,  $\langle p \rangle$  – среднее значение импульса.

Минимальное значение импульса равно его неопределенности:  $l \Delta p_x = l \cdot p_{\min} \approx \hbar$ .

$$(E_{\kappa} + mc^2)^2 = m^2 c^4 + c^2 p^2$$

$$E_{\kappa}^2 + 2mc^2 E_{\kappa} = c^2 p^2$$

$$p = \frac{1}{c} \sqrt{E_{\kappa} (E_{\kappa} + 2m_0 c^2)}$$

$$p_{\min} = \frac{1}{c} \sqrt{E_{\kappa_{\min}} (E_{\kappa_{\min}} + 2m_0 c^2)}$$

$$\frac{l}{c} \sqrt{E_{\kappa_{\min}} (E_{\kappa_{\min}} + 2m_0 c^2)} = \frac{\hbar}{2}$$

$$E_{\kappa_{\min}}^2 + 2m_0 c^2 E_{\kappa_{\min}} - \left(\frac{c\hbar}{2l}\right)^2 = 0$$

Решая это уравнение, получаем:  $E_{\kappa_{\min}} = -m_0c^2 \pm \sqrt{m_0^2c^4 + \left(\frac{c\hbar}{2l}\right)^2}$ . Так как отрицательный корень физического смысла не имеет, то:  $E_{\kappa_{\min}} = -m_0c^2 + c\sqrt{m_0^2c^2 + \left(\frac{\hbar}{2l}\right)^2}$ .

#### Задача №20

Частица находится в одномерной потенциальной яме шириной  $a$  с бесконечно высокими стенками во втором возбужденном состоянии. Определите вероятность обнаружения частицы в интервале  $\frac{1}{3}a$ , равноудаленном от стенок ямы.

$$\Psi(x) = \sqrt{2/a} \cdot \sin \frac{n\pi x}{a}$$

$n=3$  т.к. второе возб. сост.

$$P = \int_{x_1}^{x_2} |\Psi(x)|^2 dx = \int_{a/3}^{2a/3} \frac{2}{a} \sin^2 \frac{n\pi x}{a} dx = \frac{2}{a} \int_{a/3}^{2a/3} \frac{1 - \cos \frac{6\pi x}{a}}{2} dx =$$

$$= \frac{2}{a} \left( \frac{a}{3} - \frac{a}{6} - \frac{1}{2} \left( \frac{a}{6\pi} (\sin 4\pi - \sin 2\pi) \right) \right) = \frac{2}{a} \left( \frac{a}{6} - \frac{a}{12\pi} (\sin 4\pi - \sin 2\pi) \right) = \frac{1}{3}$$

#### Задача №21

Определите красную границу  $\lambda_{кр}$  фотоэффекта для цезия, если при облучении его поверхности фиолетовым светом с длиной волны  $\lambda = 400$  нм максимальная скорость фотоэлектронов равна  $V_{\max} = 6,5 \cdot 10^5$  м/с.

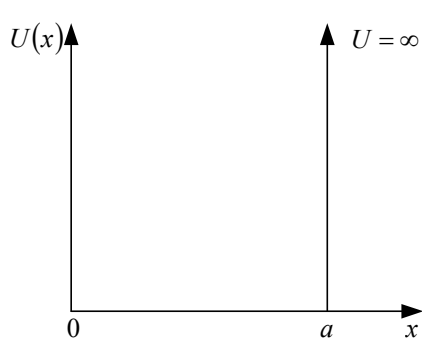
$$\hbar\omega = \frac{m(V_{\max})^2}{2} + A \Rightarrow$$

$$A = \frac{hc}{\lambda} - \frac{m(V_{\max})^2}{2};$$

$$\lambda_{кр} = \frac{hc}{A} = \frac{hc}{\frac{hc}{\lambda} - \frac{m(V_{\max})^2}{2}}$$

#### Задача №22

Частица массой  $m_0$  находится в одномерной потенциальной яме с непроницаемыми стенками в первом возбужденном состоянии. Найдите среднее значение кинетической энергии частицы  $\langle E_{\kappa} \rangle$ , если ширина ямы равна  $a$ .



$$U(x) = \begin{cases} \infty, & x < 0 \\ 0, & 0 < x < a \\ \infty, & x > a \end{cases}$$

Составим уравнение Шредингера для области  $0 < x < a$ :

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{2m_0}{\hbar^2} E \psi = 0, \text{ или}$$

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + k^2 \psi = 0, \text{ где } k^2 = \frac{2m_0}{\hbar^2} E.$$

Решение этого дифференциального уравнения имеет вид:

$$\psi(x) = A \sin(kx + \alpha).$$

Используем естественные условия, накладываемые на пси-функцию. Так как в области  $x < 0$  потенциальная энергия равняется бесконечности, то частица находится в области  $x < 0$  не может. Следовательно, плотность вероятности, а значит и пси-функция, в области  $x < 0$  равны 0. Из условия непрерывности пси-функции для точки  $x = 0$  получим:  $\psi(0) = 0 \Rightarrow \sin \alpha = 0 \Rightarrow \alpha = 0$ .

Аналогично из условия непрерывности пси-функции для точки  $x = a$  получим:

$$\psi(a) = 0 \Rightarrow \sin(ka) = 0 \Rightarrow ka = \pm n\pi, \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

Тогда пси-функции собственных состояний частицы в данной потенциальной яме

имеют вид:  $\psi(x) = A \sin\left(\frac{\pi}{a} nx\right)$ .

Учитывая, что  $k^2 = \frac{2m_0}{\hbar^2} E$ , получим:  $k^2 = \frac{2m_0}{\hbar^2} E = \frac{\pi^2}{a^2} n^2 \Rightarrow E_n = \frac{\pi^2 \hbar^2}{2m_0 a^2} n^2$ .

Мы получили энергетический спектр частицы в потенциальной яме. Определим постоянную  $A$  в выражении для пси-функции, используя условие нормировки:

$$\int_0^a |\psi|^2 dx = 1 \Rightarrow A^2 \int_0^a \sin^2\left(\frac{\pi}{a} nx\right) dx = 1 \Rightarrow A = \sqrt{\frac{2}{a}}.$$

Тогда пси-функции собственных состояний имеют вид:  $\psi_n(x) = \sqrt{\frac{2}{a}} \sin\left(\frac{\pi}{a} nx\right)$ . Во

втором возбужденном состоянии  $n = 3$ , т.к.  $n = 1$  это основное состояние, а  $n = 2$  – первое возбужденное. Поэтому пси-функция второго возбужденного состояния имеет

вид:  $\psi_3(x) = \sqrt{\frac{2}{a}} \sin\left(\frac{\pi}{a} \cdot 3x\right)$ .

Из постулатов квантовой механики среднее значение какой-нибудь физической величины  $Q$  в состоянии, описываемом пси-функцией  $\psi$  определяется как

$$\langle Q \rangle = \int \psi^* \hat{Q} \psi dx, \text{ где } \hat{Q} - \text{оператор физической величины } Q, \text{ а } \psi^* - \text{функция,}$$

сопряженная к пси-функции  $\psi$ . Операторы проекций импульса на координатные оси

имеют вид:  $\hat{p}_x = \frac{\hbar}{i} \frac{\partial}{\partial x}$ ,  $\hat{p}_y = \frac{\hbar}{i} \frac{\partial}{\partial y}$ ,  $\hat{p}_z = \frac{\hbar}{i} \frac{\partial}{\partial z}$ .

Формулы, связывающие физические величины в классической физике, в квантовой

физике справедливы для операторов этих физических величин. Поэтому можно

записать:  $\hat{p}^2 = \hat{p}_x^2 + \hat{p}_y^2 + \hat{p}_z^2 = -\hbar^2 \left( \frac{\partial}{\partial x^2} + \frac{\partial}{\partial y^2} + \frac{\partial}{\partial z^2} \right) = -\hbar^2 \nabla^2$ . Операторы квадрата

импульса и кинетической энергии связаны выражением:  $\hat{E}_k = \frac{\hat{p}^2}{2m_0} = -\frac{\hbar^2}{2m_0} \nabla^2$ . Для

одномерного случая:  $\hat{E}_k = -\frac{\hbar^2}{2m_0} \frac{\partial^2}{\partial x^2}$ .

Тогда среднее значение кинетической энергии во втором возбужденном состоянии определяется выражением:

$$\langle E_k \rangle = \int_0^a \psi_3^* \hat{E}_k \psi_3 dx = \frac{2}{a} \int_0^a \sin\left(\frac{\pi}{a} \cdot 3x\right) \left( -\frac{\hbar^2}{2m_0} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left( \sin\left(\frac{\pi}{a} \cdot 3x\right) \right) \right) dx = \frac{9\pi^2 \hbar^2}{2m_0 a^2}$$

### Задача №23

Частица находится в одномерной прямоугольной потенциальной яме с бесконечно высокими стенками. Найдите отношение вероятностей нахождения частицы в средней трети ямы для основного и первого возбужденного состояний.

$$\psi(x) = \sqrt{\frac{2}{a}} \sin n\pi \frac{x}{a}; \quad P = \int_{x_1}^{x_2} |\psi(x)|^2 dx$$

$$P_1 = \int_{\frac{a}{3}}^{\frac{2a}{3}} \left( \sqrt{\frac{2}{a}} \sin \pi \frac{x}{a} \right)^2 dx, \quad n=1 \text{ — основное состояние}$$

$$P_2 = \int_{\frac{a}{3}}^{\frac{2a}{3}} \left( \sqrt{\frac{2}{a}} \sin 2\pi \frac{x}{a} \right)^2 dx, \quad n=2 \text{ — первое возбужденное}$$

$$\begin{aligned} \frac{P_1}{P_2} &= \frac{\int_{\frac{a}{3}}^{\frac{2a}{3}} \left( \sqrt{\frac{2}{a}} \sin \pi \frac{x}{a} \right)^2 dx}{\int_{\frac{a}{3}}^{\frac{2a}{3}} \left( \sqrt{\frac{2}{a}} \sin 2\pi \frac{x}{a} \right)^2 dx} = \frac{\int_{\frac{a}{3}}^{\frac{2a}{3}} \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cos\left(2\pi \frac{x}{a}\right) dx}{\int_{\frac{a}{3}}^{\frac{2a}{3}} \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cos\left(4\pi \frac{x}{a}\right) dx} = \frac{\left(\frac{a}{3} - \frac{a}{6}\right) - \frac{1}{2} \cdot \frac{a}{2\pi} \left(\sin \frac{4\pi}{3} - \sin \frac{2\pi}{3}\right)}{\left(\frac{a}{3} - \frac{a}{6}\right) - \frac{1}{2} \cdot \frac{a}{4\pi} \left(\sin \frac{8\pi}{3} - \sin \frac{4\pi}{3}\right)} = \\ &= \frac{\frac{a}{6} - \frac{a}{4\pi} \left(-\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}\right)}{\frac{a}{6} - \frac{a\sqrt{3}}{4\pi}} = \frac{\frac{a}{6} - \frac{a}{8\pi} \left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\right)}{\frac{a}{6} + \frac{a\sqrt{3}}{8\pi}} \end{aligned}$$

### Задача №24

1. Зонная теория твердых тел. Структура зон в металлах, полупроводниках и диэлектриках.
2. Ядерная модель атома Резерфорда-Бора. Постулаты Бора.
3. Найдите с какой скоростью движется электрон, если длина волны де Бройля электрона  $\lambda_B$  равна его комптоновской длине волны  $\lambda_K$ .

$$\lambda_{\kappa} = 0,0243 \text{ \AA} = 2,43 \cdot 10^{-10} \text{ см} = \frac{2\pi\hbar}{m_e c}$$

$$\lambda_{\sigma} = \frac{2\pi\hbar}{p} = \frac{2\pi\hbar}{m_e V}; \quad V = \frac{2\pi\hbar}{\lambda_{\sigma} m_e}$$

$$\lambda_{\sigma} = \lambda_{\kappa}; \quad V = \frac{2\pi\hbar}{\lambda_{\kappa} m_e}$$

#### Задача №25

Считая, что кинетическая энергия  $E$  нуклона (протона или нейтрона) в ядре равна 10 МэВ, оцените, исходя из соотношения неопределенностей, линейные размеры ядра.

$$K = \frac{p^2}{2m} \rightarrow p = \sqrt{2mK}$$

$$\Delta p \sim p$$

$$\Delta p \Delta x \geq \hbar \rightarrow \Delta x$$

#### Задача №26

Частица массой  $m_0$  движется в одномерной прямоугольной потенциальной яме с бесконечно высокими стенками. Ширина ямы  $a$ . Найти значения энергии частицы, имея в виду, что возможны лишь такие состояния, для которых в яме укладывается целое число дебройлевских полуволен.

#### Задача №27

Электрон находится в одномерной прямоугольной потенциальной яме с непроницаемыми стенками. Определите, при какой ширине ямы  $a$  дискретность энергии электрона становится сравнимой с энергией теплового движения при температуре  $T$ .

$$E_n = \frac{\pi^2 \hbar^2}{2m_0 a^2} n^2, \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

$$\Delta E_n = E_{n+1} - E_n = \frac{\pi^2 \hbar^2}{2m_0 a^2} (2n+1).$$

$$m_e = 0,9 \cdot 10^{-30} \text{ кг}$$

Электрон свободный  $E \approx 1$  эВ. В металле  $a \approx 0,01$  м. Здесь  $\Delta E_n = 7,5 \cdot 10^{-15} \cdot n$  эВ, что несравнимо с 1 эВ.

Когда электрон свободен в атоме  $a \approx 10^{-10}$  м,  $\Delta E_n = 0,75 \cdot n$  эВ, что уже является заметной величиной.

Например, энергия связи электрона в атоме  $E_{св} \approx 10$  эВ.

#### Задача №28

Волновая функция основного состояния электрона в атоме водорода имеет вид

$$\psi(r) = \frac{1}{\sqrt{\pi a^3}} \cdot \exp\left(-\frac{r}{a}\right), \text{ где } r - \text{расстояние от электрона до ядра, } a - \text{радиус первой}$$

боровской орбиты. Найдите вероятность того, что электрон находится в области  $r \leq a$ .

$$\frac{dp}{dr} = \frac{dp}{dV} \cdot \frac{dV}{dr} = |\Psi|^2 \cdot \frac{d\left(\frac{4}{3}\pi r^3\right)}{dr} = |\Psi|^2 \cdot 4\pi r^2 = \frac{4r^2}{a^3} e^{-\frac{2r}{a}}$$

$$P = \int_0^a \frac{4r^2}{a^3} e^{-\frac{2r}{a}} dr$$

### Задача №29

Частица массой  $m_0$  падает на прямоугольный потенциальный порог высоты  $U_0$ . Энергия частицы равна  $E$ , причем  $E < U_0$ . Найдите эффективную глубину проникновения частицы в область порога, т.е. на расстояние от границы порога до точки, в которой плотность вероятности нахождения частицы уменьшится в  $e$  раз.

Плотность вероятности проникновения частицы на глубину  $X$  порога:

$$W_z(x) = \frac{4k_1^2}{k_1^2 + k_2^2} \exp\left(-\frac{2}{\hbar} \sqrt{2m_0(U_0 - E)}x\right), \text{ где}$$

$$k_1 = \sqrt{\frac{2m_0}{\hbar^2} E}, \quad k_2 = \sqrt{\frac{2m_0}{\hbar^2} (U_0 - E)}.$$

### Задача №30

Покажите, что в атоме водорода на круговой стационарной боровской орбите укладывается целое число длин волн де Бройля электрона. Определите длину волны де Бройля электрона на круговой орбите с главным квантовым числом  $n$ .

$$\lambda_B = \frac{2\pi\hbar}{p}$$

$$\frac{mV^2}{r} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{e^2}{r^2}$$

$$mVr = n\hbar$$

$$\rightarrow r(n) = \frac{4\pi\epsilon_0\hbar^2 n^2}{me^2}$$

$$V = \frac{n\hbar}{mr} = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0\hbar n}$$

$$l(n) = 2\pi r(n) = \frac{8\pi^2\epsilon_0\hbar^2 n^2}{me^2}$$

$$\lambda_B = \frac{2\pi\hbar}{mV} = \frac{8\pi^2\epsilon_0\hbar^2 n}{me^2}$$

$$\frac{l}{\lambda_B} = n$$

